ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРАКТИКУМ ПО МАКРОЭКОНОМИКЕ

Томск
2014

УДК 33
ББК 65.012.2
Г80

Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю., Цветницкая С.А.
Г80 Практикум по макроэкономике. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. – 42 с.

Учебно-методическое пособие включает задания и краткое изложение теории для выполнения лабораторных работ по макроэкономике. В основе пособия лежит курс лекций, читаемый студентам факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета.

Для студентов специальностей «применение математических методов в экономике» и «прикладная математика и информатика».

УДК 33
ББК 65.012.2

Рецензент –
доктор экономических наук,
профессор Томского государственного университета *Т.И. Коломиец*

Статический межотраслевой баланс

Лабораторная работа № 1

В основе схемы межотраслевого баланса производства, потребления и накопления общественного продукта лежит разделение совокупного продукта на промежуточный и конечный. Всё народное хозяйство представлено в виде n производящих и потребляющих отраслей. Величины межотраслевых потоков обозначены x_{ij}, где i – номер производящей отрасли, j – номер потребляющей отрасли.

Статический межотраслевой баланс описывается системой уравнений, в которой в каждом уравнении выпускаемая отраслью валовая продукция приравнивается сумме продукции, потребляемой этой отраслью и всеми другими отраслями x_{ij} и чистому выпуску x_i, т.е. валовой продукции. Пусть X – вектор-столбец валовой продукции, Y – вектор-столбец продукции конечного использования, A – матрица коэффициентов прямых материальных затрат, элементы которой $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ безразмерные величины представляют измеренные в ден. ед. затраты продукции сектора i, используемые в качестве затрат сектором j для производства его продукции стоимостью 1 ден. ед.

$X = AX + Y$ называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса Леонтьева или моделью «затраты – выпуск».

Величина валовой продукции каждой отрасли

$$X = (E - A)^{-1} Y,$$

где E – единичная матрица.

$B = (E - A)^{-1}$ – матрица коэффициентов полных затрат.

Тогда $X = BY$.

Задание 1

Для трёхотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Проверить условие продуктивности матрицы прямых материальных затрат. Найти коэффициенты полных материальных затрат и вектор валовой продукции.

Заполнить схему межотраслевого материального баланса

Отрасли-производители	Отрасли-потребители			Промежуточное потребление	Конечное потребление	Валовой выпуск
	1	2	3			
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	Y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	Y_2	x_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\sum_{j=1}^{n} x_{3j}$	Y_3	x_3
Промежуточные затраты	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i3}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	
Валовая добавленная стоимость						
Валовой выпуск	x_1	x_2	x_3			$\sum_{i=1}^{n} x_i$

Величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$. Отсюда величины межотраслевых потоков продукции рассчитываются по формуле

$$x_{ij} = x_j a_{ij}.$$

По строкам схемы межотраслевого баланса для каждой производящей отрасли валовая продукция

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i .$$

Промежуточное потребление находят как сумму потребления отраслями, представленного в строках таблицы.

По столбцам схемы межотраслевого баланса видно потребление каждой отраслью j: валовая продукция отрасли x_j равна сумме потребляемых промежуточных материальных затрат и валовой добавленной стоимости.

Промежуточные затраты находят как сумму затрат по столбцам таблицы. Эти две суммы равны.

Валовую добавленную стоимость определяют как разность между валовым выпуском и промежуточными затратами.

Динамическая модель межотраслевого баланса

Лабораторная работа № 2

В динамической модели межотраслевого баланса рассматриваются показатели модели для концов периодов $t \in [1, T]$, при заданном в качестве начального условия выпуске в нулевом году $X^{(0)}$.

Динамическая модель имеет следующее представление:

$$X^{(t)} = AX^{(t)} + B^{(t)}(X^{(t)} - X^{(t-1)}) + Y^{(t)}, \qquad (1)$$

где индекс t – номер года, матрица $B^{(t)}$ характеризует инвестиции, поставляемые из отрасли в отрасль, и вводится аналогично матрице прямых затрат A.

Вектор-столбец инвестиций

$$Z^{(t)} = B^{(t)}(X^{(t)} - X^{(t-1)}). \qquad (2)$$

При известном конечном потреблении $Y^{(t)}$ определяется валовой выпуск

$$X^{(t)} = (E - A^{(t)} - B^{(t)})^{-1}(Y^{(t)} - B^{(t)}X^{(t-1)}). \qquad (3)$$

Отсюда следует, что для увеличения выпуска $X^{(t)}$ надо увеличить конечное потребление $Y^{(t)}$ по сравнению с предыдущим годом.

При известном выпуске $X^{(t)}$ и конечном потреблении $Y^{(t)}$ определяется вектор инвестиций

$$Z^{(t)} = (E - A)X^{(t)} - Y^{(t)}). \qquad (4)$$

Задание 2

Рассчитать параметры межотраслевого баланса для первого и второго годов при условии, что результаты таблицы межотраслевого баланса, принимаются за начальные условия.

Непроизводственное потребление

1) $Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix}$;

2) $Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix}$; $Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix}$.

Секторы-производители	Секторы-потребители			
	Сельское хозяйство	Промышленность	Домашние хозяйства	Общий выпуск
Сельское хозяйство	50	40	110	200
Промышленность	70	30	150	250
Домашние хозяйства	80	180	40	300
Общий выпуск	200	250	300	

Матрица $B^{(t)}$, характеризующая инвестиции, не зависит от времени:

$$B^{(t)} = B = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 \\ 0,04 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Из таблицы следует: общий валовой выпуск $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix}$, матрица прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,16 \\ 0,35 & 0,12 \end{pmatrix}$.

Вариант 1. Выпуск в 1-ом году по формуле (1): $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix}$, оказывается равным выпуску нулевого года, так как в таблице приведён баланс без учёта инвестиций:

$$Z^{(1)} = (E - A)X^{(1)} - Y^{(1)}) = \begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что для 2-го года получим тот же результат.

Вариант 2. По формуле (1) $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 220,51 \\ 273,08 \end{pmatrix}$, $Z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,69 \\ 3,13 \end{pmatrix}$.

Элементы матрицы инвестиций продукции $z_{ij}^{(t)}$ отраслью i в отрасль j определяется по формуле

$$z_{ij}^{(t)} = b_{ij}(x_j^{(t)} - x_j^{(t-1)}) .$$

Выпуск во втором году $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 237,00 \\ 290,13 \end{pmatrix}$, вектор инвестиций $Z^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,34 \\ 2,36 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку: подставить результаты в правую часть формулы (1).

Экономический рост

Модель Солоу-Свана

Лабораторная работа № 3

В закрытой экономике предложение труда $L_t = L_0 e^{\lambda t}$, где $\lambda = \overline{L}_t$ – темп прироста населения, и прирост капитала равен объёму инвестиций dK_t = I_t = S_t = sY_t, где s – норма накопления. Технология производства определена производственной функцией Кобба – Дугласа:

$$Y_t = L_t^{\alpha} K_t^{\beta}. \tag{1}$$

Из определения капиталовооружённости труда $k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$ следует, что темп прироста капиталовооружённости $\overline{k}_t = \overline{K}_t - \overline{L}_t$, а темп прироста капитала определяется нормой сбережений s и нормой выбытия (износа) капитала μ:

$$\overline{K}_t = \frac{dK_t}{K_t} = \frac{sY_t - \mu K_t}{K_t} = \frac{sY_t}{K_t} - \mu = \frac{sY_t / L_t}{K_t / L_t} - \mu = s\frac{y_t}{k_t} - \mu,$$

где y_t средняя производительность труда в момент времени t.

Следовательно, темп прироста капиталовооружённости

$$\overline{k}_t = \frac{sy_t}{k_t} - (\mu + \lambda).$$

Равенство $\overline{k}_t$ = 0, т.е.

$$sy_t = k_t(\mu + \lambda) \tag{2}$$

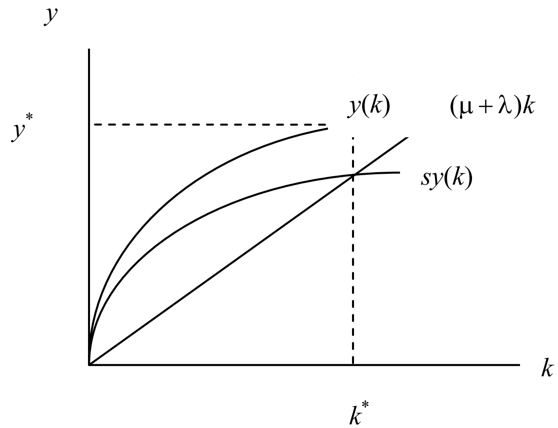
соответствует росту экономики с постоянной капиталовооружённостью при полном использовании труда и капитала.

Так как y представляет доход на одного работающего, то sy – объём сбережений (предложения капитала) одного работающего, $k(\mu + \lambda)$ – объём инвестиций, необходимый для поддержания капиталовооружённости на уровне k при растущем в темпе λ предложении труда.

Для производственной функции вида (1) $y = k^{\alpha}$ равенство (2) выполняется при

$$k^* = \left(\frac{s}{\mu + \lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad y^* = \left(\frac{s}{\mu + \lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Средний объём потребления на одного работающего $c = (1-s)\left(\dfrac{s}{\mu+\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.



На рисунке точка пересечения линий $sy(k)$ и $(\mu+\lambda)k$ определяет равновесные значения y^* и k^*. Слева от k^* сбережения превышают необходимые для поддержания постоянной капиталовооружённости труда инвестиции, поэтому k растёт, а его цена снижается, справа – наоборот. Так техническая взаимозаменяемость факторов производства и гибкая система цен приводят экономику к устойчивому экономическому росту при полном использовании труда и капитала с темпом прироста национального дохода

$$\overline{y}_t = \overline{I}y_t = \overline{K}_t = \overline{L}_t = \lambda\ .$$

Задание.

В периоде t_0 в экономике имеется 625 единиц капитала и 16 единиц труда. Условия производства представлены производственной функцией $Y_t = L_t^{0.75} K_t^{0.25}$. Темп прироста трудовых ресурсов равен 2% за период. Население сберегает 20% национального дохода.

1. Как изменится средняя производительность труда в периоде t_6 по сравнению с периодом t_0? К какому значению стремится производительность капитала?

2. Как изменится средняя производительность труда в периоде t_6 по сравнению с периодом t_0,если темп прироста трудовых ресурсов равен 5%? К какому значению стремится производительность труда?

Построить графические зависимости.

«Золотое правило» накопления

Лабораторная работа № 4

В модели Солоу-Свана устойчивый рост при полном использовании факторов производства возможен при любой норме сбережений и темп прироста национального дохода всегда равен темпу прироста населения.

Опримальная норма сбережения определяется из условия потребления на одного работающего

$$c = (1-s)\left(\frac{s}{\mu+\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \to \max_{s} .$$

Из условия $\frac{dc}{ds} = 0$ следует «золотое правило» накопления:

$$s = \alpha . \qquad (3)$$

Задание 1. В периоде t_0 в экономике имеется 237 единиц капитала и 11 единиц труда. Условия производства представлены производственной функцией $Y_t = L_t^{0.75} K_t^{0.25}$. Темп прироста трудовых ресурсов равен 2% за период. Население сберегает 20% национального дохода.

1. Достигнуто ли в экономике динамическое равновесие?

2. Соответствуют ли сбережения «золотому правилу» накопления?

3. Определить динамику потребления на одного работающего до периода t_6.

4. Какой объём капитала необходим в периоде t_0, чтобы обеспечить темп роста с полной занятостью при норме сбережений s = 0.25?

5. Сравнить динамику потребления на одного работающего до периода t_6, при условиях «3» и «4».

Построить графические зависимости.

Задание 2. Условия производства представлены производственной функцией $Y_t = (1.02^t L_t)^{0.6} K_t^{0.4}$. Темп прироста трудовых ресурсов равен

3% за период. Экономика находится в состоянии динамического равновесия при соблюдении «золотого правила» накопления.

На основании модели Солоу-Свана определить в периоде t_5 среднюю производительность реальной единицы труда, капиталовооружённость и среднюю норму потребления. Построить графические зависимости.

Общее макроэкономическое равновесие. Модель AD – AS совокупного спроса и совокупного предложения

Лабораторная работа № 5

Равновесие – это такое состояние экономики, когда объём ВВП (совокупное предложение) равен совокупному спросу.

Макроэкономика находится в равновесии в точке пересечения кривых совокупного спроса *AD* (aggregate demand) и совокупного предложения *AS* (aggregate supply).

Формула для связи количества денег в экономике M, уровня цен P и объёма выпуска Y имеет вид

$$Y = \frac{M}{kP}, \tag{1}$$

где k – коэффициент пропорциональности. То есть при постоянном количестве денег в экономике функция совокупного спроса $Y(P)$ является убывающей.

В долгосрочной неоклассической модели при полном использовании производственных факторов совокупное предложение остаётся постоянным независимо от уровня цен. График $Y(P)$ линии *AS* является прямой параллельной оси абсцисс.

В краткосрочной кейнсианской модели при условии неполной занятости (депрессия в экономике) и неизменных ценах на товары и неизменной заработной плате совокупное предложение остаётся постоянным независимо от уровня цен. График $Y(P)$ линии *AS* является прямой параллельной оси ординат.

В переходном состоянии экономики, приближающемся к уровню полной занятости, при увеличении цен производство расширяется и увеличивается выпуск.

Сдвиг кривых совокупного спроса и совокупного предложения в результате неожиданных изменений неценовых факторов (изменение количества денег, изменение налоговых ставок, скачки цен на энергоносители, стихийные бедствия) называются шоками.

Задание 1. Экономика находится в состоянии равновесия. Функция совокупного предложения представлена в виде $P = 0,8Y$.

Совокупный спрос $Y = \frac{1000}{0,25P}$, где M = 1000 – количество денег в экономике. Из-за неблагоприятного шока выпуск сократился на 25%. Провести анализ с построением графиков функций *AD* и *AS* и определить новую массу денег, необходимую для нейтрализации последствий шока.

Задание 2. Экономика первоначально находилась в состоянии полной занятости. Уравнение кривой совокупного спроса имело вид $Y = 2400 - 200P$. Потенциальный ВВП равен 2 000 млрд долл.

1. Увеличение государственных закупок сдвинуло эту кривую в положение, описываемое уравнением $Y = 2\,500 - 200P$. Покажите графически и рассчитайте координаты (объём выпуска и уровень цен) точек краткосрочного и долгосрочного равновесия в экономике.

2. Падение инвестиционного спроса сдвинуло кривую *AD* таким образом, что в краткосрочном периоде равновесный ВВП составил 1 860 млрд долл. Определите координаты точки равновесия в долгосрочном периоде.

Задание 3. Экономика первоначально находилась в состоянии полной занятости. Уравнение долгосрочной кривой совокупного предложения *Y* = 4 000 млрд долл. Уравнение краткосрочной кривой совокупного предложения *P* = 1.2. Уравнение кривой совокупного спроса *AD* $Y = 4\frac{M}{P}$. В исходном состоянии денежная масса *M* = 1 200 млрд долл. Определите координаты точек равновесия в краткосрочном и долгосрочном периодах после увеличения денежной массы на 5%.

Задание 4. Экономика, первоначально находившаяся на уровне потенциального объёма выпуска, испытала негативный шок предложения, в результате которого уровень цен поднялся на 10%. Уравнение кривой *AD* имело вид $Y = 2\,400 - 200P$. Потенциальный ВВП был равен 2 000 млрд долл. Определите координаты точки краткосрочного равновесия в экономике, установившегося после шока.

Задание 5. Вследствие резкого увеличения цен на ресурсы краткосрочная кривая *AS* приняла вид *P* = 2.1. Потенциальный ВВП, на уровне которого первоначально находилась экономика, был равен 2 000 млрд долл. Уравнение кривой AD в исходном состоянии имело вид $Y = 4\dfrac{M}{P}$. Предложение денег M = 1 200 млрд долл. В результате стабилизационной политики Центрального банка, экономика вернулась к состоянию полной занятости. На сколько увеличилось предложение денег в экономике?

Максимизация потребления и экономический рост

Лабораторная работа № 6

ВВП определяется в соответствии с неоклассической производственной функцией

$$Y(t) = F(K(t),L(t)),\ t \geq 0. \tag{1}$$

ВВП $Y(t)$ делится на две части $I(t)$ и $C(t)$, где $I(t)$ – инвестиции (накопление), а $C(t)$ – потребление, в пропорциях s и $\tilde{s} = 1 - s$.

Параметр s называется нормой накопления, а параметр $\tilde{s}$ – нормой потребления, $0 < s < 1$.

Итак,

$$\begin{aligned} Y(t) &= I(t)+C(t) = sY(t)+(1-s)Y(t) = \\ &= s\,F(K(t), L(t))+(1-s)F(K(t), L(t)), \end{aligned} \tag{2}$$

Задача оптимального распределения ВВП с целью максимизации потребления: при заданном законе изменения трудовых ресурсов $L(t)$ и изменении капитала $K(t)$ в соответствии с дифференциальным уравнением

$$\dot{K}(t) = sF(K(t),L(t)) - \mu K(t), \quad t \geq 0 \tag{3}$$

($\mu > 0$ – коэффициент амортизации основных фондов)

найти такое значение параметра s, чтобы величина потребления $C(t)$ достигала максимального значения:

$$C(t) = (1-s)F(K(t),L(t)) \Rightarrow \max_{\{0<s<1\}}. \tag{4}$$

Перейдём к удельным характеристикам

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, \quad c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \quad f(k(t)) = \frac{F(K(t),L(t))}{L(t)}, \tag{5}$$

Предположим, что трудовые ресурсы изменяются по экспоненциальному закону

$$L(t) = L_0 e^{mt},\ L_0 > 0,\ m>0. \tag{6}$$

Тогда

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\mu + m)k(t),\ t > 0. \tag{7}$$

Задача сведена к определению

$$c(t)=(1-s)f(k(t)) \Rightarrow \max_{0<s<1} \tag{8}$$

при условии

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \nu k(t), \quad t \geq 0, \quad \nu = \mu + m, \quad \mu > 0, \quad m > 0.$$

Оптимальное значение s^* нормы накопления:

$$s^* = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}, \tag{9}$$

оптимальное значение фондовооружённости $k^* = const$ является единственным корнем уравнения:

$$f'(k) = \nu. \tag{10}$$

Экономический рост при $s = s^*$ и $k = k^*$ называется магистральным.

Рассмотрим случай конечного промежутка времени $t \in [0,T]$, когда нахождение экономики на магистрали составляет часть промежутка $t \in [T_1,T_2]$. Очевидно, что $0 < T_1 < T_2 < T$.

Момент времени выхода на магистраль T_1, и T_2 – момент времени схода с магистрали определяются из уравнения (7)

$$T_1 = \int_{k_0}^{k^*} \frac{dk}{sf(k) - \nu k}, \; T_2 = T - \tilde{T} = T - \int_{k^*}^{k_T} \frac{dk}{sf(k) - \nu k}. \tag{11}$$

Задание

Определить k^* и s^* для производственной функции Кобба – Дугласа

$$f(k(t)) = A\, k(t))^{\alpha},$$

если A=1.01, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.12$, $m = 0.03$, T = 30. Определить моменты времени выхода на магистраль и схода с магистрали. Построить графики $k(t)$, $t \in [0,T]$ траекторий экономического роста при условии

1) $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$.
2) $k_0 < k^*$, $k_T < k^*$.
3) $k_0 > k^*$, $k_T > k^*$.
4) $k_0 > k^*$, $k_T < k^*$.

Макроэкономическое равновесие на рынке благ

Модели потребления

Лабораторная работа № 7

Обозначения:

$C = C_a + C_Y(Y-T)$ – функция потребления с учётом налогов;

$I = I_a - I_i i$ – функция инвестиций;
$N = N_a - N_Y Y - N_i i$ –функция чистого экспорта;
Y – доход (ВВП);
C – потребление домашних хозяйств;
I – инвестиции;
G – государственные расходы;
N – чистый экспорт;
C_a – автономное потребление;
C_Y – предельная склонность к потреблению;
T – налоги;
$Y_d = Y - T$ – располагаемый доход;
I_a – автономные инвестиции;
I_i – предельная склонность к инвестированию;
i – процентная ставка;
N_a – автономный экспорт;
N_Y , N_i – чувствительность экспорта к изменению дохода и процентной ставки;

Кейнсианская модель потребления (модель абсолютного дохода)

$$C = C_a + C_y Y_d$$

справедлива для краткосрочного периода. Здесь Y_d – располагаемый доход (после выплаты налогов).

Модель Фридмена (модель перманентного дохода)

$$\bar{Y}_t = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^j Y_{t-j} + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j Y_{t-j}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Перманентный доход зависит от всех предшествующих доходов домашних хозяйств.

Формулу перманентного дохода можно преобразовать к виду

$$\bar{Y}_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)\bar{Y}_{t-1}.$$

Здесь α – чувствительность перманентного дохода: чем меньше α, тем устойчивее перманентный доход.

В модели Фридмена потребление $C = C_Y \bar{Y}$, Эта формула отличается от модели Кейнса на величину автономного потребления C_a.

Задание

Зависимость между величиной национального дохода и объёмом потребления домашних хозяйств задана следующей таблицей.

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_t	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280
C_t	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
$\overline{Y}_{t-1}$										
$\varepsilon_t = Y_t - \overline{Y}_{t-1}$										

1. На основе этих данных вывести кейнсианскую функцию потребления и определить, при какой величине национального дохода домашние хозяйства не делают сбережений.

2. Определить перманентный доход на каждый следующий год, положив перманентный доход 1-го года равным 100, $\alpha = 0.2$.

3. Сравнить графики фактического и перманентного доходов и графики фактического потребления, модели потребления Фридмена и Кейнса.

Инвестиционный спрос

Лабораторная работа № 8

Рассмотрим инвестиционный проект с одноразовой инвестицией I и последующих инвестиционных доходов $R_1, \ldots, R_j \ldots R_n$, где j – номер года, n – продолжительность инвестиционного проекта.

Чистый приведённый доход (Net Present Value) NPV или дисконтированный доход

$$NPV = \frac{R_j}{(1+q)^j} - I.$$

Проект считают экономически целесообразным, если чистый приведённый доход $NPV \geq 0$.

Значение $q^* = q$, при котором $NPV = 0$, называется *внутренней нормой доходности* или *предельной эффективностью капитала*.

Задание.

Имеется два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи постнумерандо (в конце текущего года) распределены по годам следующим образом:

Проект 1: –5 –20 3 10 10 20 20.

Проект 2: –20 –5 5 10 10 20 20.

Определить чистый приведённый доход, индекс прибыльности, срок окупаемости и внутреннюю норму доходности при ставках дисконтирования 10% и 20% и доходность инвестиций при стоимости капитала $i = 10\%$ годовых.

Замечание.

Так как инвестиционные выплаты производятся в конце 1-го и 2-го года, то при решении этой задачи надо дисконтировать не только доходы, но и инвестиции.

Индекс прибыльности определяется через отношение дисконтированного по ставке q дохода к дисконтированным по ставке q инвестициям.

Срок окупаемости можно определить из равенства наращенной суммы инвестиций (5;20 и 20;5) проектов к концу 2-го года и дисконтированной суммы доходов.

Пример для 1-го проекта при q = 10%:

наращенная сумма инвестиций: 5(1+0.1)+20 = 25.5;

дисконтированный первый доход $\frac{3}{1.1} = 2.73$;

дисконтированный доход за 2 года $\frac{3}{1.1} + \frac{10}{1.1^2} = 10.99$;

дисконтированный доход за 3 года $\frac{3}{1.1} + \frac{10}{1.1^2} + \frac{10}{1.1^3} = 18.5$;

доход за 4 года $\frac{3}{1.1} + \frac{10}{1.1^2} + \frac{10}{1.1^3} + \frac{10}{1.1^4} = 32.165 > 25.5$,

т.е. срок окупаемости больше 3 лет, но меньше 4 лет.

Следовательно, срок окупаемости 1-го проекта при q = 10%: 3 года + $\frac{25.5 - 18.5}{32.165 - 18.5}$ = 3.51.

Для определения *доходности* определить сумму дисконтированных по ставке, равной стоимости капитала i = 10% инвестиций $\sum_{j=1}^{2} \frac{R_j}{(1+i)^j}$.

Доходность r определяется в результате решения уравнения $\sum_{j=3}^{7} \frac{R_j}{(1+r)^j} - \sum_{j=1}^{2} \frac{R_j}{(1+i)^j} = 0$ с применением пакетов Mathcad, Excel. Результаты представить в таблице

Показатели	q = 10%		q = 20%	
	Проект1	Проект2	Проект1	Проект2
NPV				
Индекс прибыльности				
Срок окупаемости	3.51			
q* %				
r %				

Дать экономическую интерпретацию и привести качественный анализ инвестиционных проектов.

Линия IS – инвестиции-сбережения (investment – saving)

Лабораторная работа № 9

Линия *IS* определяет функциональные связи между инвестициями(I), сбережениями(S), процентной ставкой (i) и ВВП (Y).

$Y = C+I+G+N$ – основное макроэкономическое соотношение.

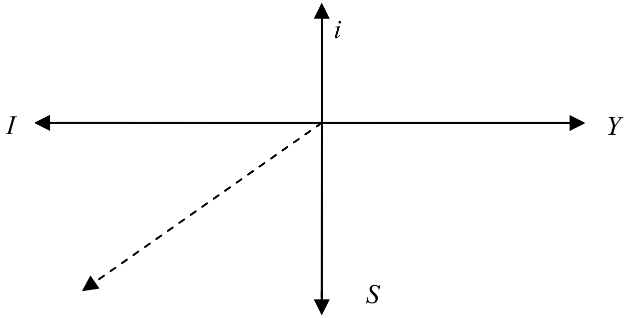
Из основного макроэкономического соотношения следует

$$Y = \frac{C_a - C_Y T + I_a + G + N_a}{1 - C_Y + N_Y} - \frac{I_i + N_i}{1 - C_Y + N_Y} i \qquad (1)$$

– соотношение, определяющее линию *IS*.

Задание

В закрытой экономике без экономической активности государства функция инвестиций $I = 10 - 2i$, функция сбережений $S = 0.1Y - 2$. Построить *IS* – линию: а) аналитическим способом; б) графическим.



Как изменится уравнение линии *IS* и на какую величину сдвинется линия *IS*:

a) если правительство увеличит государственные расходы на 50?

b) если в результате ожидания экономического спада предельная склонность к сбережению увеличилась до 0.5?

c) если в результате экономического спада автономное потребление уменьшилось на 5?

d) если объём инвестиций увеличился на 50?

Макроэкономическое равновесие на рынке денег. Линия LM – ликвидность-деньги (liquidity preference – money)

Обозначения:
M – деньги;
H – активы ЦБ (денежная база);
MR – минимальные резервные покрытия коммерческих банков;
UR – избыточные резервы коммерческих банков;
K – кредиты коммерческих банков;
MH – наличные деньги в обращении;
D – чековые (бессрочные) депозиты коммерческих банков;
α –норматив минимального резервного покрытия;
β – норматив кассовых остатков коммерческих банков;
γ – доля наличных денег в общей сумме кредитов коммерческих банков.

Балансовое уравнение системы коммерческих банков:

$$H = MH + MR + UR = \alpha D + \beta D + \gamma K\ .$$

Балансовое уравнение центрального банка:

$$D = MR + UR + K = \alpha D + \beta D + K\ .$$

$M = \dfrac{1+\gamma(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta(1-\gamma)+\gamma(1-\alpha)}H$ – множитель перед *H* – денежный мультипликатор.

$K = \dfrac{(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta(1-\gamma)+\gamma(1-\alpha)}H$ **–** множитель перед *H* – кредитный мультипликатор.

$D = \dfrac{1}{\alpha+\beta(1-\gamma)+\gamma(1-\alpha)}H$ – множитель перед *H* – депозитный мультипликатор.

Лабораторная работа № 10

На рынке денег будет равновесие, если предложение денег М равно спросу. Спрос на деньги равен спросу на деньги для сделок и из-за предосторожности и спросу на деньги как имущество: $l = l_{\text{сд}} + l_{\text{пр}} + l_{\text{им}}$.

Предположим, что спрос на реальные кассовые остатки представлен в виде линейной функции

$$l(Y,i) = \frac{M}{P} = l_Y Y - l_i i,$$

где M – количество денег в экономической системе, P – уровень цен, Y – объём выпуска, i – процентная ставка, l_Y , l_i – чувствительность спроса на реальные кассовые остатки к изменению дохода и процентной ставки.

Из этой формулы получим аналитическое выражение для линии LM в виде линейной функции $Y(i)$

$$Y = \frac{l_i}{l_Y} i + \frac{1}{l_Y} \frac{M}{P}. \qquad (2)$$

Из этой формулы следует, что увеличение M или уменьшение P ведёт к увеличению спроса на реальную кассу $\frac{M}{P}$, а это смещает линию LM вправо.

Задание

Центральный банк сформировал денежную базу в 60 млрд. руб. и установил норму минимального резервного покрытия 20%. Коммерческие банки в качестве избыточных резервов держат 15% депозитов и выдали кредитов на сумму 65 млрд.руб. Спрос населения на деньги для сделок и из- за предосторожности составляет 25% реального дохода, а спрос на деньги как имущество определяется по формуле $\frac{36}{i-1}$.

а) Вывести уравнение линии LM. Построить график линии LM.

b) Какова должна быть величина национального дохода, чтобы при ставке процента i = 5% уровень цен был равен единице?

c) Как изменится эта величина, если при прочих равных условиях центральный банк снизит минимальную норму резервного покрытия вдвое, а коммерческие банки всё приращение избыточных резервов использует для дополнительных кредитов?

d) Насколько возрастёт сумма кредитов?

Макроэкономическое равновесие на рынках благ и денег

Модель IS – LM

Лабораторная работа № 11

Макроэкономическое равновесие на совместном рынке благ и денег достигается в точке пересечения линий *IS* и *LM* – точке эффективного спроса(Y_0,i_0), координаты которой получаются решением системы уравнений

$$Y = \frac{C_a - C_Y T + I_a + G + N_a}{1 - C_Y + N_Y} - \frac{I_i + N_i}{1 - C_Y + N_Y} i \tag{1}$$

и

$$Y = \frac{l_i}{l_Y} i + \frac{1}{l_Y} \frac{M}{P}. \tag{2}$$

Пример.

Функция потребления $C = 1500 + 0,72(Y - T)$.

Налоговая ставка $\mathrm{T_Y} = 50\%$.

Функция инвестиций $I = 800 - 4600i$.

Функция чистого экспорта $N = 700 - 0,06Y - 1000i$.

Спрос на реальные кассовые остатки $M/P = Y/2 - 1\,000i$.

Государственные расходы $G = 850$, предложение денег $M = 4\,000$, уровень цен $P = 2$.

Найти равновесный уровень процентной ставки и дохода.

Решение.

Для получения уравнения линии *IS* подставим исходные данные в основное макроэкономическое соотношение:

$Y = C+I+G+N = 1500+0,72(1 - 0,5)Y+ 800 - 4600i+850+700 - 0,06Y - 1000i.$

После преобразования получим:

$$Y = 5500 - 8000i.$$

Для получения уравнения линии *LM* подставим в функцию спроса на реальные кассовые остатки значения $M = 4\,000$ и $P = 2$: Получим

$$Y = 4\,000+2\,000i.$$

Для получения равновесного уровня процентной ставки приравняем правые части уравнений линий *IS* и *LM* :

$$5\,500 - 8\,000i = 4\,000+2\,000i.$$

Отсюда находим $i_0 = 0,15$ или 15%.

Равновесный уровень дохода $Y_0 = 4\,000+2\,000i_0 = 4\,300$.

Анализ влияния кредитно-денежной и бюджетно-налоговой политики на состояние экономики

Лабораторная работа № 12

Увеличение предложения денег ведёт к увеличению ВВП, так как при этом процентная ставка снижается, что стимулирует рост инвестиций. Линия LM сдвигается вправо.

Увеличение предложения денег влияет на величину чистого экспорта (см. формулу выше), так как увеличение Y снижает, а снижение процентной ставки i увеличивает объём чистого экспорта N.

Бюджетно-налоговая (фискальная) политика заключается в изменении налогов и государственных расходов. При уменьшении налогов или увеличении государственных расходов ВВП растёт за счёт эффекта мультипликатора. При этом процентная ставка увеличивается, что ведёт к сокращению инвестиций и чистого экспорта. Линия IS сдвигается вправо.

Задание.

Функция потребления $C = 1\,500 + 0{,}72(Y - T)$.

Налоговая ставка $T_Y = 50\%$.

Функция инвестиций $I = 800 - 4\,600i$.

Функция чистого экспорта $N = 700 - 0{,}06Y - 1\,000i$.

Спрос на реальные кассовые остатки $M/P = Y/2 - 1\,000i$.

Государственные расходы $G = 850$, предложение денег $M = 4\,000$, уровень цен $P = 2$.

Найти равновесный уровень процентной ставки i_0 и дохода Y_0 (см. пример лабораторная № 11).

Построить графики линий LM_0 ($Y = 4\,000 + 2\,000i$) и IS_0 ($Y = 5\,500 - 8\,000i$) отметить точку равновесия (Y_0, i_0).

Определить равновесный уровень процентной ставки i_1 и дохода Y_1 при увеличении ставки налогообложения до $T_Y = 64\%$.

Построить графики линий LM_0 ($Y = 4\,000 + 2\,000i$) и IS_1, ($Y = 4\,812{,}5 - 7\,000i$) отметить точку равновесия (Y_1, i_1).

Определить объём предложения денег M_1 для сохранения значения процентной ставки i_0 ($4\,812{,}5 - 7\,000i_0 = M_1 + 2\,000i_0$) и новое значение объём выпуска Y_2 ($Y = 4\,812{,}5 - 7\,000\, i_0$). Отметить новую точку равновесия (Y_2, i_0).

Определить функцию совокупного спроса (в уравнение (1) для линии IS подставить выражение процентной ставки из уравнения (2) линии LM) и построить график $Y(P)$.

Проанализировать результаты, написать отчёт.

Общее экономическое равновесие. Кейнсианская модель

Лабораторная работа № 13

Объединим условия равновесия на рынках благ, денег и труда, добавим уравнение производственной функции:

$$T(Y) + S(Y) = I(i) + G,$$

$$\frac{M}{P} = l(Y, i),$$

$$W = Pw,$$

$$W = W^S(L, P),$$

$$Y = Y(L).$$

где Y – ВВП (выпуск); S – сбережения домашних хозяйств; T – налоги; I – инвестиции; i – процентная ставка; G – государственные расходы; M – количество денег в обращении; P – уровень цен; $l(Y,i)$ – функция спроса на реальные кассовые остатки; w – предельная производительность труда; W – цена спроса на труд; W^S – цена предложения труда; L – трудовые ресурсы (занятость).

Экзогенно заданными являются значения G и M. При гибкой системе цен i,W и P значения Y,L,P,i,W, соответствующие совместному равновесию на трёх рынках, определяются из решения системы уравнений (2.1).

Задание.

Технология производства характеризуется производственной функцией

$$Y = 82L - 2L^2.$$

Функция спроса на инвестиции I = 240 – 6i.

Поведение домашних хозяйств на рынке благ характеризуется функцией потребления C =54 + 0,75(Y – $T_Y Y$), на рынке денег – функцией спроса на реальную кассу l(Y,i) = 0,04Y + 2(50 – i), на рынке труда – функцией цены предложения труда $W^S = 0{,}5L + 10P$.

В обращении находится 104 денежных единицы, государственные расходы составляют 110 ден. ед., ставка подоходного налога $T_Y = 20\%$.

Определить равновесные значения макроэкономических параметров i,,W,L, Y и уровень цен P.

Получить уравнение совокупного предложения $Y^S(P)$ и совокупного спроса $Y^D(P)$ (Y^D=C+I=Y–S+I) :

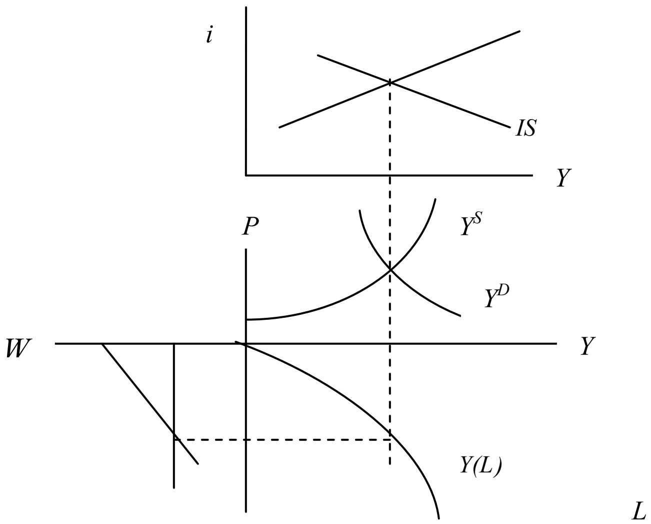
1) при условии гибких цен;

2) при условии, что предприниматели увеличат спрос на инвестиции $I = 340 - 6i$;

3) при условии, что правительство закрепило минимальную ставку номинальной заработной платы W = 25 ден. ед. определить наличие конъюнктурной безработицы.

4) Как изменится ситуация на рынке труда при увеличении количества денег в обращении до 154 ден. ед.?

5) Результаты представить графически: *IS*-*LM*, $Y^S(P)$ и $Y^D(P)$; $Y(L,)$; W^S (L)и $L(W^D)$. (Аналогично приведённой схеме)



Теория экономических циклов

Модель Самуэльсона – Хикса

Лабораторная работа № 14

В этой модели конъюнктурные циклы связываются с соотношением между потреблением национального дохода и инвестициями в производство.

Основные предположения в модели Самуэльсона – Хикса: 1) уровень цен и ставки процента постоянны; 2) объём предложения на рынке благ абсолютно эластичен, т.е. спрос на блага постоянно удовлетворяется (кейнсианский подход).

Объём потребления домашних хозяйств в текущий период

$$C_t = C_a + C_Y Y_{t-1}. \qquad (1)$$

Объём инвестиций

$$I_t^u = \kappa(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \qquad (2)$$

где $\kappa > 0$ – акселератор, характеризующий рост объёма инвестиций при увеличении прироста национального дохода на единицу, $\Delta Y_{t-1,t-2} = Y_{t-1} - Y_{t-2}$ – приращение совокупного спроса (национального дохода) за период.

Поскольку C_a не зависит от уровня производства благ, то равновесное текущее значение дохода Y_t будет определяться в виде

$$Y_t = C_Y Y_{t-1} + I_t^u + A = C_Y Y_{t-1} + \kappa(Y_{t-2} - Y_{t-1}) + A =$$
$$= (C_Y + \kappa) Y_{t-1} - \kappa Y_{t-2} + A, \qquad (3)$$

где $A = C_a + I_a$ – величина автономного спроса (расходов). Уравнение (3) является неоднородным разностным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами, характеризующим динамику изменения национального дохода во времени.

В экономике достигается долгосрочное равновесие, когда объём национального дохода стабилизируется на уровне

$$\overline{Y} = Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = \ldots = Y_{t-n}, \qquad (4)$$

где n – число временных периодов с неизменной величиной автономных расходов A. Из (3) с учётом (4) следует

$$\overline{Y} = C_Y \overline{Y} + A. \qquad (5)$$

Отсюда определяется величина выхода на стационарной траектории

$$\overline{Y} = \frac{1}{1 - C_Y} A = \kappa^{м} A, \qquad (6)$$

где

$$\kappa^{м} = \frac{1}{1 - C_Y} > 1 \qquad (7)$$

– мультипликатор, определяющий зависимость равновесного значения национального дохода $\overline{Y}$ от предельной нормы потребления C_Y.

Исследуем динамику изменения во времени национального дохода относительно его равновесного значения.

Из соотношений (3) и (5) с учётом обозначения

$$\Delta Y_t = Y_t - \overline{Y},\ \Delta Y_{t-1} = Y_{t-1} - \overline{Y},\ \Delta Y_{t-2} = Y_{t-2} - \overline{Y}$$

получаем, что динамика изменения во времени величины отклонения национального дохода от его равновесного значения характеризуется однородным разностным уравнением второго порядка

$$\Delta Y_t = (C_Y + \kappa)\Delta Y_{t-1} - \kappa \Delta Y_{t-2}.$$

Свойства решения этого уравнения определяются характеристическим уравнением

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0, \tag{8}$$

где $a_1 = C_Y + \kappa$, $a_2 = -\kappa$, корни которого

$$\lambda_{1,2} = \frac{C_Y + \kappa}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D},\ D = (C_Y + \kappa)^2 - 4\kappa. \tag{9}$$

По условию задачи первый корень всегда больше второго.

Вид решения уравнения (9) зависит от типа корней.

Если $D =$ $(C_Y + \kappa)^2 - 4\kappa > 0$, то характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня

$$\lambda_1 = \frac{C_Y + \kappa}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D},\ \lambda_2 = \frac{C_Y + \kappa}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D}$$

и решение уравнения имеет вид

$$\Delta Y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t,$$

константы A_1 и A_2 определяются начальными условиями.

Если λ_1 и λ_2 – положительные, то решение ΔY_t монотонно возрастающее при $\lambda_1 > 1$ и $\lambda_2 > 1$ и убывающее при $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 < 1$.

Если $D =$ $(C_Y + \kappa)^2 - 4\kappa = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{C_Y + \kappa}{2}$ и решение имеет вид $\Delta Y_t = (A_1 + A_2 t)\lambda^t$.

В этом случае решение – знакопеременное возрастающее при $|\lambda| > 1$ и убывающее при $|\lambda| < 1$.

При условии, что $D=$ $(C_Y + \kappa)^2 - 4\kappa < 0.$ корни λ_1 и λ_2 комплексные

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \tag{10}$$

$i = \sqrt{-1}$, и решение $\Delta Y_t = g^t(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)$, носит характер колебаний.

Константы B_1 и B_2 определяются начальными условиями,

$$g = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{-a_2} = \sqrt{\kappa},$$

$$\alpha = \frac{a_1}{2} = \frac{C_Y + \kappa}{2},$$

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{-a_1^2 - 4a_2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\kappa - (C_Y + \kappa)^2}.$$

При g > 1 решение неустойчивое, инвестиционный мультипликатор $\kappa < 1$. Условию устойчивости g < 1 соответствует условие $\kappa < 1$. Для выполнения достаточного условия устойчивости $|\lambda_1|$ < 1 предельная норма потребления должна удовлетворять условию C_Y < 1.

Задание 1. Заданы функция потребления домашних хозяйств $C_t = 100 + 0,76Y_t$ и функция спроса предпринимателей на автономные и индуцированные инвестиции

$$I_t = 500 + \kappa\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}).$$

a) Построить траектории динамики национального дохода при следующих значениях акселератора: 1) κ = 0,2; 2) κ = 0,8; 3) κ = 1,5; 4) κ = 2,5 при граничных условиях $Y_0 = 1\,000$, $Y_1 = 1\,200$.

b) Исследовать влияние на национальный доход значений акселератора κ и предельной нормы потребления C_Y.

Результаты моделирования представить на одном графике. Сделать вывода о влиянии коэффициентов акселерации на глубину кризиса и темп подъема после кризиса.

Замечание: Динамика национального дохода в вариантах 3) и 4) оказывается неправдоподобной. Это связано с тем, что для простоты характеристики модели приняты линейными. По Хиксу существует два ограничителя: верхним ограничителем является уровень полной занятости, так как доход не может превысить доход полной занятости, нижним величина амортизационных отчислений, поскольку объём спроса на инвестиции не может быть меньше суммы амортизации. По Хиксу траектория изменяет своё направление, когда достигает верхней или нижней границы, т.е. всегда носит колебательный характер.

Задание 2. Вследствие ежегодного увеличения населения с темпом m функция автономного спроса имеет вид

$$A_t = A_0(1+m)^t.$$

С учётом этого уравнение (3) принимает вид

$$Y_t = (C_Y + \kappa)Y_{t-1} - \kappa Y_{t-2} + A_0(1+m)^t.$$

Величина равновесного национального дохода на стационарной траектории из-за мультипликативного эффекта ежегодно возрастает в (1+m) раз:

$$\overline{Y} = \frac{1}{1 - \dfrac{C_Y + m}{1+m} + \dfrac{\kappa}{(1+m)^2}} A_0(1+m)^t.$$

Заданы функция потребления домашних хозяйств $C_t = 100 + 0{,}76Y_t$ и функция спроса предпринимателей на автономные и индуцированные инвестиции

$$I_t = 500 + \kappa\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}).$$

Автономный спрос ежегодно увеличивается на 2%.

Построить траектории динамики национального дохода при следующих значениях граничных условий $Y_0 = 1\ 000$, $Y_1 = 1\,200$.

Модель Гудвина

Лабораторная работа № 15

Экономические циклы в модели Гудвина возникают вследствие изменения и перераспределения национального дохода между трудом и капиталом.

Обозначения:

t – текущий период времени;

Y_t – национальный доход;

w_t – реальная ставка заработной платы;

L_t^* – общие трудовые ресурсы (население);

L_t – занятые в производстве трудовые ресурсы;

$\frac{L_t}{L_t^*} = \nu_t$ – доля трудовых ресурсов в общем количестве населения (показатель занятости);

$\frac{Y_t}{L_t} = y_t$ – средняя производительность труда;

K_t – основные фонды (капитал);

$\frac{K_t}{Y_t} = \eta_t$ – капиталоёмкость национального дохода;

$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \delta_t$ – доля труда в национальном доходе;

Основные предположения:

Годовой темп прироста трудовых ресурсов

$$\frac{L_{t+1}^* - L_t^*}{L_t^*} = l = \text{const};$$

годовой темп прироста производительности труда

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = \frac{\Delta y}{y} = m = \text{const}; \tag{1}$$

капиталоёмкость национального дохода

$$\eta_t = \eta = \text{const}.$$

Так как

$$Y_t = F(K_t, L_t), \tag{2}$$

где $F(\cdot)$ – линейно-однородная неоклассическая производственная функция, то при условиях (1) темпы роста национального дохода и капитала совпадают, т.е.

$$\frac{\Delta Y_t}{Y_t} = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t}. \tag{3}$$

Так как

$$\delta_t = w_t \frac{L_t}{Y_t} = \frac{w_t}{y_t}, \tag{4}$$

то темп прироста доли труда в национальном доходе равен разности темпов прироста реальной зарплаты и средней производительности труда.

$$\frac{\Delta\delta}{\delta_t} = \frac{\Delta w}{w_t} - \frac{\Delta y}{y_t} = \frac{\Delta w}{w_t} - m, \tag{5}$$

где

$$\frac{\Delta\delta}{\delta_t} = \frac{\delta_{t+1} - \delta_t}{\delta_t}, \ \frac{\Delta w}{w_t} = \frac{w_{t+1} - w_t}{w_t}. \tag{6}$$

Для темпа изменения ставки реальной заработной платы используется модель

$$\frac{\Delta w}{w_t} = \rho \nu_t - \gamma, \ \rho > 0, \ \gamma > 0. \tag{7}$$

Использование (7) в (5) показывает, что темп изменения доли труда в национальном доходе представляется в виде

$$\frac{\Delta\delta}{\delta_t} = \rho \nu_t - (\gamma + m). \tag{8}$$

Так как $\nu_t = \dfrac{L_t}{L_t^*}$, то темп прироста показателя занятости

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_t} = \frac{\nu_{t+1} - \nu_t}{\nu_t} \tag{9}$$

будет равен разности между темпами прироста числа работающих

$$\frac{\Delta L}{L_t} = \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t} \qquad (10)$$

и числа предлагающих труд $\frac{\Delta L^*}{L^*_t} = l,$ т.е.

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_t} = \frac{\Delta L}{L_t} - l. \qquad (11)$$

Так как $L_t = \frac{Y_t}{y_t},$ то темп прироста работающих $\frac{\Delta L}{L_t}$ равен разности между темпами прироста национального дохода $\frac{\Delta Y_t}{Y_t}$ и средней производительности труда $\frac{\Delta y}{y_t} = m,$ т.е.

$$\frac{\Delta L}{L_t} = \frac{\Delta Y_t}{Y_t} - m. \qquad (12)$$

Использование (4) в (12) даёт, что

$$\frac{\Delta L}{L_t} = \frac{\Delta K_t}{K_t} - m. \qquad (13)$$

Приращение капитала $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$ равно объёму инвестиций I_t, которые, согласно «Золотому правилу накопления» определены в виде

$$I_t = (1 - \delta_t) Y_t, \qquad (14)$$

где $\tilde{\delta}_t = (1 - \delta_t)$ есть доля капитала в национальном доходе. Тогда

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} = \frac{(1-\delta_t)Y_t}{K_t} = \frac{1-\delta_t}{\eta}. \qquad (15)$$

Тогда из (11), (13), (15) следует

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_t} = \frac{1}{\eta} - (m + l) - \frac{\delta_t}{\eta}. \qquad (16)$$

Перейдём от разностных уравнений (8) и (16) к дифференциальным уравнениям, полагая

$$t + 1 = t + \Delta t,\ \delta_{t+\Delta t} - \delta_t = \Delta\delta_t,\ \nu_{t+\Delta t} - \nu_t = \Delta\nu_t. \qquad (17)$$

Тогда в пределе при $\Delta t \to 0$

$$\Delta t \to dt, \Delta\delta_t \to d\delta_t, \Delta\nu_t \to d\nu_t \qquad (18)$$

и из (8), (16) следует система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\delta_t}{dt} = [\rho\nu_t - (m+\gamma)]\delta_t, \qquad (19)$$

$$\frac{d\nu_t}{dt} = \frac{1 - \eta(m+l) - \delta_t}{\eta}\nu_t. \qquad (20)$$

Система двух дифференциальных уравнений (19) и (20), описывающая совместное изменение во времени доли труда в национальном доходе δ_t и доли трудовых ресурсов в общем количестве населения ν_t, составляет модель Гудвина для исследования конъюнктурных колебаний в экономике, т.е. экономических циклов.

Задание 3. Темп прироста производительности труда $m = \frac{\Delta y_t}{y_t} =$ 0.05, капиталоёмкость национального дохода $\eta = \frac{K}{Y} =$ 5, темп прироста населения $l = \frac{\Delta L_t^*}{L_t^*} =$ 0.02, коэффициенты в формуле для прироста ставки реальной заработной платы $\rho =$ 0.6, $\gamma =$ 0.568. В начале рассматриваемого процесса прирост показателя занятости $\nu_0 =$ 0.96, доля труда в национальном доходе $\delta_0 =$ 0.5.

Задание выполнить с применением пакета Mathcad.

Построить графические зависимости прироста показателя занятости и доли труда в национальном доходе от времени.

Исследовать влияние на показатели занятости и доли труда в национальном доходе значений m, η, l, ρ, γ .

Результаты моделирования представить на одном графике.

Опционы

Лабораторная работа № 16

Опцион – вторичная (производная) ценная бумага, договор, предметом которого является первичная ценная бумага, или базовый актив (акция, облигация, фондовый индекс и т.п.). Данный контракт в обмен на премию «выписывается» продавцом опциона и предоставляет покупателю (владельцу) право, но не обязанность купить (опцион *call*) у продавца опциона или продать (опцион *put*) ему оговоренное количество базового актива по оговоренной цене в течение определенного периода времени или на определенную дату (дату истечения срока опциона).

Появление такого финансового инструмента, как опцион, вызвано стремлением хеджировать риски, связанные с владением рисковых базовых активов, а также возможностью получить прибыль. Следует отметить, что положения сторон договора – держателя и продавца – не одинаковы: покупатель имеет *право* предъявить или не предъявить опцион к исполнению, тогда как подписчик имеет потенциальное обязательство, за которое в момент подписания опциона выплачивается премия опциона.

Очевидно, что эта сумма должна быть в каком-то смысле эквивалентна возможной прибыли владельца опциона. Возникает задача рассчитать оптимальную премию по опциону. В качестве модели ценообразования будем использовать многопериодическую биномиальную модель, которая является дискретным аналогом модели Блэка-Шоулза в непрерывном времени и которую схематично можно представить в виде графа.

Поставленную задачу будем решать на (B, S) – финансовом рынке, на котором обращаются безрисковая и рисковая ценные бумаги: банковский счет B с процентной ставкой r и акция, стоимость S которой может увеличиться в $u>0$ раз с вероятностью p_u и может уменьшиться в $d>0$ раз с вероятностью p_d. Рассмотрим стандартные и экзотические опционы европейского и американского стиля. Опцион европейского стиля может быть предъявлен к исполнению только в указанную дату (дату истечения срока, дату исполнения, дату погашения), американский опцион может быть погашен в любой день «жизни» опциона до истечения срока исполнения. Опционный контракт, при заключении которого оговаривается вид базисного актива, объем контракта, цена покупки или продажи, тип (*put* или *call*) и стиль, называется стандартным, или «ванильным» опционом. Для повышения ликвидности рынка стали вносить дополнительные условия в довольно гибкие опционные контракты, которые стали называть нестандартными, или экзотическими опционами.

Каждый опцион характеризуется функцией выплат (платежным обязательством), согласно которой осуществляются платежи продавцом опциона покупателю в случае погашения опциона. Процедура вычисления цены произвольного обязательства является рекурсивной и заключается в методе обратной индукции.

Задание. Пусть текущая цена акции равна *S$*, за n месяцев акция может подняться в цене на u% или упасть на d%. Вычислить цену опциона стиля *style*, типа *type*, вида *sort* на год, если цена исполнения (страйк) равна *K$* и безрисковая процентная ставка равна *r%* годовых с капитализацией *capitalization*. Построить зависимость цены опциона от стоимости акции, от страйковой цены (задать различные значения). Проанализировать влияние стиля опциона на его стоимость. Выяснить, какой опцион – экзотический или ванильный – дороже, дать интерпретацию результатов.

Определения и расчетные формулы.

Вероятности увеличения и уменьшения цены акции соответственно

$$p_u = \frac{1+r-d}{u-d}, \qquad p_d = 1 - p_u .$$

Метод обратной индукции для расчета премии по опциону европейского стиля

$$\begin{cases} C_T^m = f\left(S_T^m\right), m = 0...T, \\ C_t^m = \dfrac{1}{1+r}\left(C_{t+1}^{m+1} p_u + C_{t+1}^m p_d\right), m = 0...t, t = 0...T-1, \end{cases}$$

метод обратной индукции для расчета премии по опциону американского стиля

$$\begin{cases} C_T^m = f\left(S_T^m\right), m = 0...T, \\ C_t^m = \max\left\{ f\left(S_t^m\right), \dfrac{1}{1+r}\left(C_{t+1}^{m+1} p_u + C_{t+1}^m p_d\right)\right\}, m \le t, t < T, \end{cases}$$

где $f\left(S_T^m\right)$ – функция выплат, T – количество моментов изменения состояния рынка.

Функция выплат стандартного опциона call

$$f^{call}\left(S\right) = \left(S - K\right)^+ = \max\left(S - K, 0\right).$$

Функция выплат стандартного опциона put

$$f^{put}\left(S\right) = \left(K - S\right)^+ = \max\left(K - S, 0\right).$$

Метод обратной индукции для расчета цены барьерного опциона с барьером снизу H и базовой функцией выплат $f^{call/put}\left(S\right)$

$$\begin{cases} C_T^m = f^{call/put}\left(S_T^m\right), \text{ if } S_T^m > \mathrm{H}, \\ C_T^m = 0, \text{ if } S_T^m \le \mathrm{H}, \ \ m = 0...T, \\ C_t^m = \dfrac{1}{1+r}\left(C_{t+1}^{m+1} p_u + C_{t+1}^m p_d\right), \text{if } S_t^m > \mathrm{H}, \\ C_t^m = 0, \text{ if } S_t^m \le \mathrm{H}, \ \ m = 0...t, t = 0...T-1. \end{cases}$$

Метод обратной индукции для расчета цены барьерного опциона с барьером сверху H и базовой функцией выплат $f^{call/put}\left(S\right)$

$$\begin{cases} C_T^m = f^{call/put}\left(S_T^m\right), \text{ if } S_T^m < \text{H}, \\ C_T^m = 0, \text{ if } S_T^m \geq \text{H}, \quad m = 0...T, \\ C_t^m = \dfrac{1}{1+r}\left(C_{t+1}^{m+1} p_u + C_{t+1}^m p_d\right), \text{if } S_t^m < \text{H}, \\ C_t^m = 0, \text{ if } S_t^m \geq \text{H}, \quad m = 0...t, t = 0...T-1. \end{cases}$$

Метод обратной индукции для расчета цены цифрового опциона первого касания с барьером снизу H и базовой функцией выплат $f^{call/put}(S)$

$$\begin{cases} C_T^m = K, \text{ if } S_T^m > \text{H}, \\ C_T^m = 0, \text{ if } S_T^m \leq \text{H}, \quad m = 0...T, \\ C_t^m = \dfrac{1}{1+r}\left(C_{t+1}^{m+1} p_u + C_{t+1}^m p_d\right), \text{if } S_t^m > \text{H}, \\ C_t^m = K, \text{ if } S_t^m \leq \text{H}, \quad m = 0...t, t = 0...T-1. \end{cases}$$

Метод обратной индукции для расчета цены цифрового опциона первого касания с барьером сверху H и базовой функцией выплат $f^{call/put}(S)$

$$\begin{cases} C_T^m = f^{call/put}\left(S_T^m\right), \text{ if } S_T^m > \text{H}, \\ C_T^m = 0, \text{ if } S_T^m \leq \text{H}, \quad m = 0...T, \\ C_t^m = \dfrac{1}{1+r}\left(C_{t+1}^{m+1} p_u + C_{t+1}^m p_d\right), \text{if } S_t^m > \text{H}, \\ C_t^m = 0, \text{ if } S_t^m \leq \text{H}, \quad m = 0...t, t = 0...T-1. \end{cases}$$

Вариант 1. *S* = 100; *u* = 25; *d* = 20; *style* – европейский / американский; *type* – стандартный; *sort* – *call*; *K* = 115; *r* = 5, *n* = 12, *capitalization* – 1 раз в год.

Вариант 2. *S* = 100; *u* = 25; *d* = 20; *style* – европейский / американский; *type* – стандартный; *sort* – *put*; *K* = 95; *r* = 5, *n* = 12, *capitalization* – 1 раз в год.

Вариант 3. *S* = 100; *u* = 25; *d* = 20; *style* – европейский / американский; *type* – стандартный; *sort* – *call*; *K* = 115; *r* = 4, *n* = 3, *capitalization* – каждый квартал.

Вариант 4. *S* = 100; *u* = 25; *d* = 20; *style* – европейский / американский; *type* – стандартный; *sort* – *call*; *K* = 95; *r* = 4, *n* = 3, *capitalization* – каждый квартал.

Вариант 5. *S* = 100; *u* = 25; *d* = 20; *style* – европейский / американский; *type* – стандартный; *sort* – *put*; *K* = 115; *r* = 4, *n* = 3, *capitalization* – каждый квартал.

Вариант 6. $S = 100$; $u = 25$; $d = 20$; *style* – европейский / американский; *type* – стандартный; *sort* – *put*; $K = 95$; $r = 4$, $n = 3$, *capitalization* – каждый квартал.

Вариант 7. $S = 100$; $u = 25$; $d = 20$; *style* – американский; *type* – с барьером снизу, равным $H = 70\$$; *sort* – *put*; $K = 115$; $r = 4$, $n = 3$, *capitalization* – каждый квартал.

Вариант 8. $S = 100$; $u = 25$; $d = 20$; *style* – американский; *type* – с барьером снизу, равным $H = 150\$$; *sort* – *put*; $K = 105$; $r = 4$, $n = 3$, *capitalization* – каждый квартал.

Вариант 9. $S = 100$; $u = 25$; $d = 20$; *style* – американский; *type* – с барьером снизу, равным $H = 75\$$; *sort* – *call*; $K = 115$; $r = 4$, $n = 3$, *capitalization* – каждый квартал.

Вариант 10. $S = 100$; $u = 25$; $d = 20$; *style* – американский; *type* – с барьером снизу, равным $H = 180\$$; *sort* – *call*; $K = 105$; $r = 4$, $n = 3$, *capitalization* – каждый квартал.

Инвестиционный портфель

Лабораторная работа № 17

Рассмотрим n акций. Цену j-й акции в момент t обозначим через S_t^j. Доходность актива S^j на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ вычисляется по формуле

$$r_i^j = \frac{S_i^{\,j} - S_{i-1}^{\;j}}{S_{i-1}^{\;j}}. \tag{1}$$

Так как доходность является случайной величиной, поэтому характеристиками актива являются среднее значение $m_j = Mr^j$ и риск актива $\sigma_j^{\,2} = M(r^j - m_j)^2$. Найти структуру портфеля означает найти доли капитала, вложенные в различные активы. В случае трех активов структура портфеля задается вектором $x = (x_1\, x_2\, x_3)$. Ограничения на вектор $x: \sum_i x_i = 1,\ x_i \ge 0.$

Аналогично активу, вводятся понятия доходности и риска портфеля.. Доходность портфеля в момент t_i вычисляется по формуле

$$rp_i = \sum_k x_k r_i^k. \tag{2}$$

Капитал портфеля находится по формуле

$$W_{t+1} = W_t(1 + rp_t)\,. \tag{3}$$

Средняя доходность портфеля m_p и риск портфеля $\sigma_p{}^2$ вычисляют по формулам

$$m_p = m^T x,\;\; \sigma_p{}^2 = x^T V x\,, \tag{4}$$

где m, V – вектор средней доходности активов и ковариационная матрица доходностей активов соответственно.

Задача построения инвестиционного портфеля ставится как задача оптимизации. Рассмотрим следующие три постановки задач оптимизации.

Задача 1. Найти структуру портфеля с минимальным риском. Минимизируемая функция – риск портфеля

$$\min\; x^T V x,\; \sum_i x_i = 1,\; x_i \ge 0\,. \tag{5}$$

Задача 2. Найти структуру портфеля с максимальной доходностью. Максимизируемая функция – доходность портфеля

$$\max\; x^T m_p,\; \sum_i x_i = 1,\; x_i \ge 0\,. \tag{6}$$

Задача 3. Найти структуру портфеля, максимизирующую отношение Шарпа, т.е. отношение средней доходности портфеля к риску портфеля

$$\max \frac{m_p{}^T x}{x^T V x}\,. \tag{7}$$

Уравнение динамики цены актива. Пусть доходность актива S в момент t является нормально распределенной случайной величиной z со средним значением m и среднеквадратичным отклонением σ. Цена актива S в момент t S_t вычисляется по формуле

$$S_t = S_{t-1}\exp(z_t)\,. \tag{8}$$

Задание

Задание выполнить с применением пакета Mathcad.

1. Получить три массива случайных величин $Z1$, $Z2$, $Z3$. Использовать встроенную функцию rnorm. $Z1$ = rnorm(1000,0.0005,0.01), $Z2$ = rnorm(1000,0.001,0.025), $Z3$ = rnorm(1000,0.002,0.02).

2. Вычислить три массива цен активов по формуле (8). Цены активов в начальный момент принять равными 100, 50, 50 соответственно. Для получения массива $S1$ использовать случайный вектор $Z1$, для $S2$ и $S3$ использовать $Z1$ и $Z2$ соответственно. Построить графики динамики цен трех активов. Три вектора $S1$, $S2$, $S3$ объединить в матрицу, используя встроенную функцию augment. S = augment ($S1$, $S2$, $S3$).

3. Получить матрицу доходностей активов, используя формулу (1).

4. Получить характеристики активов (вектор средних значений и ковариационную матрицу) , применяя встроенные функции mean и cvar

$$m_i = mean(r^i), \quad V_{i,j} = c\,\mathrm{var}(r^i, r^j)\ .$$

Через диагональные элементы матрицы V вычисляется характеристика актива σ_j, называемая волатильностью и характеризующая риск актива

$$\sigma_j^{\ 2} = V_{j,j}$$

Построить график доходности актива S^j, его среднего значения m_j и $m_j - \sigma_j$.

5. Найти структуры оптимальных портфелей, решая оптимизационные задачи (5), (6), (7).

Для решения задачи оптимизации использовать встроенный блок Given. Пример использования блока для решения задачи построения портфеля с максимальной доходностью

$$x = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)^T \qquad f(x) = m^T x$$

$$Given$$

$$x \ge o \quad \sum_i x_i = 1$$

$$x1 = Maximize(f, x)$$

6. Вычислить динамику капитала 3 портфелей (3 формула). Для нахождения динамики капитала портфеля, имеющего структуру $x1$, по формуле (3), надо знать доходность этого портфеля в каждый момент времени. Массив доходностей портфеля со структурой $x1$ получим по формуле

$$rp = r \cdot x1\ .$$

Построить графики динамики капитала полученных портфелей.

7. Вычислить характеристики трёх портфелей: среднее значение и риск портфелей. Средние значения портфелей со структурами $x1$, $x2$, $x3$ вычислим, используя встроенную процедуру

$$mean : mean(r \cdot x1),\ mean(r \cdot x2),\ \ mean(r \cdot x3).$$

Риск портфелей вычислим соответственно по формулам

$$x1^T Vx1,\ \ x2^T Vx2,\ \ \ x3^T Vx3.$$

8. Проанализировать полученные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И.* Макроэкономика. М. : ЮРАЙТ, 2011.

2. *Кузнецов Б.Т.* Макроэкономика. М. : ЮНИТИ, 2009.

3. *Агапова Т.А., Серёгина С.Ф.* Макроэкономика. Тесты. Киров : АСА, 2003.

4. *Корнейчук Б.В., Симкина Л.Г.* Макроэкономика Тесты и задачи. СПб. : ОЛМА-ПРЕСС, 2002.

5. *Дёмин Н.С., Грекова Т.И.* Макроэкономика. Томск, 2008.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 194 от «7» марта 2014 г. Тираж 50 экз.