

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Н.Ю. Марголис

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

УДК 519.85
ББК 22.18
М253

Марголис Н.Ю.

Имитационное моделирование : учеб. пособие. – Томск :
М253 Издательский Дом Томского государственного
университета, 2015. – 130 с.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Имитационное моделирование», прослушавших курсы лекций по теории вероятностей, математической статистике и основам программирования.

УДК 519.85
ББК 22.18

© Томский государственный университет, 2015
© Марголис Н.Ю., 2015

Введение

Непосредственное исследование систем и процессов на практике часто бывает затруднено из-за сложности объектов изучения, высокой стоимости и большой продолжительности исследования, отсутствия объекта в природе на этапе его разработки, сложности воссоздания условий функционирования объекта (изучение чрезвычайных ситуаций). В таких случаях используется моделирование – замена изучаемого объекта его моделью, исследование модели, обобщение результатов исследования модели на сам объект.

Различают два вида моделирования: **физическое и математическое**. При физическом моделировании строится макет изучаемого объекта, сохраняющий природу самого объекта, и анализируется работа макета в некоторых условиях. Примером физического моделирования может служить испытание модели летательного аппарата в аэродинамической трубе. При математическом моделировании исследуемый объект описывается с помощью математических формул, алгоритмов или логических конструкций.

Математические модели классифицируются:

1) по характеру изменения состояний объекта – на **дискретные и непрерывные**;

2) по способу определения состояний объекта – на **детерминированные и вероятностные**;

3) по способу представления внутренних процессов в объекте – на **аналитические и имитационные**.

В дискретных математических моделях объект изменяет свое состояние только в дискретные моменты времени. Например, в математической модели очереди в кассу это моменты, когда в очередь встают новые клиенты или моменты, когда очередь покидают обслуженные клиенты.

В непрерывных математических моделях состояние меняется непрерывно во времени. Например, в моделях термодинамики состояние объекта – температура, меняется непрерывно.

В детерминированных математических моделях состояние объекта в заданный момент времени однозначно определяется начальными условиями и входными воздействиями на объект. Пример математической модели такого рода – уравнение колебаний маятника в вакууме.

В вероятностных (стохастических) моделях состояние объекта в каждый момент времени не определяется однозначно из-за случайных факторов, действующих на объект. Можно определить лишь распределение вероятностей возможных состояний объекта.

Использование **аналитических моделей** (алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений и др.) предполагает наличие идеальных условий, которых в реальности не бывает. Поэтому аналитические модели дают чаще всего довольно грубо приближенные результаты.

Имитационные модели, реализуемые в виде компьютерных программ, учитывают сложные взаимосвязи внутри объекта и случайные факторы, влияющие на функционирование элементов объекта.

Современные имитационное моделирование позволяет исследовать системы и процессы любой сложности и с любой степенью детализации. Имитационные модели реализуют алгоритмы, описывающие процесс функционирования элементов исследуемого объекта и все их взаимодействия. Случайные воздействия на систему генерируются с помощью специальных датчиков, встроенных в язык программирования или написанных вручную. Результаты анализа работы имитационной модели объекта представляются в виде статистических выводов и прогнозов, графических презентаций.

Основным недостатком имитационного моделирования как метода научного исследования является то, что оно не дает аналитического решения поставленных задач, является

приближенным и привязано к конкретным условиям эксперимента. Но очень часто имитационное моделирование – это единственный способ исследования сложных систем и процессов, когда даже математическая постановка задачи невозможна, не говоря уже об отсутствии аналитических методов ее решения.

Компьютеры способны имитировать поведение системы только в дискретном времени, и все события, происходящие в системе, имеют привязку к **дискретной шкале времени с заданным шагом** (микросекунда, час, сутки, год и т.д.)

Чтобы обеспечить имитацию параллельных (одновременно происходящих) процессов функционирования элементов системы, используется специальная переменная t_M – **модельное время**. С помощью этой переменной организуется квазипараллельная работа компонентов имитационной модели. «Квази» потому, что в имитационной модели блоки, соответствующие компонентам системы, работают последовательно, тогда как в соответствующих компонентах реальной системы необходимые действия происходят одновременно.

Модельное время t_M следует отличать от **реального времени** t_R работы системы и общего времени T работы программы имитации. Например, при имитации работы билет-

ной кассы в течение t_R , равного году, величина T составляет 1 минуту.

Модельное время t_M может меняться двумя принципиально разными способами: а) с шагом до следующего события; б) с фиксированным шагом.

Терминологически выделяют четыре способа организации квазипараллелизма при имитационном моделировании:

1) **Событийный способ.** Множество разных событий в моделируемой системе конечно. Для каждого типа событий определена последовательность действий, приводящих к изменению состояния системы. Определены условия перехода от события одного типа к событию другого типа.

2) При применении **агрегатного способа** организации квазипараллелизма имеет место тесное взаимодействие между функциональными элементами системы. Все элементы моделируемой системы (**агрегаты**) обмениваются сигналами. Выходной сигнал одного агрегата является входным сигналом для другого. Моделирование поведения агрегата – это последовательность переходов из одного состояния в другое под воздействием поступающих сигналов.

3) **Способ просмотра активностей.** Все действия для элементов моделируемой системы различны и приводят к

наступлению разных событий. У каждого действия есть условия его выполнения. Моделирующий алгоритм обрабатывает те из просматриваемых активностей, для которых выполняются соответствующие условия. При этом моделируется время выполнения соответствующего действия и реализуется само действие.

4) **Транзактный способ.** Инициаторами появления событий в имитационной модели являются **транзакты** – динамические объекты (заявки на обслуживание), которые перемещаются между элементами системы. Имитационная модель – это набор блоков, связанных с обработкой и обслуживанием транзактов. С помощью этих блоков происходит уничтожение и создание транзактов, задержка их на некоторое время, управление движением транзактов, занятие и освобождение ими различных ресурсов системы.

При создании имитационной модели принципиальными являются ее размеры и количество ресурсов, затраченных на ее создание.

Формально определены следующие **этапы имитационного моделирования:**

I. Содержательное описание объекта моделирования, включающее

- а) выбор показателей эффективности работы объекта;
- б) определение управляющих параметров и контролируемых переменных;
- в) описание внешней среды, с которой взаимодействует объект;
- г) определение возможных ограничений модели.

II. Построение концептуальной модели и формальное описание объекта моделирования.

Концептуальная модель – это упрощенное математическое или алгоритмическое описание исследуемого объекта. Определяются составляющие объект элементы и связи между ними. Выбираются способ организации квазипараллелизма в имитационной модели, методы обработки результатов моделирования и формы их представления. Выполняется алгоритмизация работы элементов модели.

III. Программная реализация имитационной модели.

Разрабатывается полный алгоритм моделирования объекта, выбираются средства его реализации: универсальный язык программирования (Си, Паскаль и др.) или специальные пакеты прикладных программ, автоматизирующие имитационное моделирование. Программа отлаживается, верифицируется на реальных или тестовых данных алгоритм и его со-

ответствие целям моделирования. Проверяется адекватность имитационной модели – совпадение с некоторой заданной точностью характеристик работы имитационной модели и реального объекта.

К свойствам имитационной модели относят:

- 1) точность имитации (оценка влияния случайных факторов на функционирование имитационной модели);
- 2) необходимый для организации полного цикла моделирования объем выборки исходных данных;
- 3) время моделирования и необходимый для моделирования объем памяти компьютера;
- 4) устойчивость имитационной модели при работе в разных режимах и варьировании параметров моделирования.

I. ИМИТАЦИЯ СКАЛЯРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА РЕАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ

1.1. Базовый датчик

Все нужды имитации случайности в процессе имитационного моделирования обслуживает **базовый датчик** псевдослучайных чисел. Базовый датчик – это компьютерная программа, возвращающая реализацию случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(0,1)$. Все разнообразие случайных воздействий на объект моделирования имитируется путем преобразований этих псевдослучайных чисел.

Типы базовых датчиков случайных чисел

Мы рассмотрим только два типа базовых датчиков, широко применяемых на практике.

1.1.1. Датчики на последовательностях максимальной длины. В компьютерах для представления целых чисел отводится обычно p двоичных разрядов-битов, из которых один разряд – знаковый и $p-1$ разрядов – цифровые, так что диапазон представления целого числа от $-(2^{p-1}-1)$ до $2^{p-1}-1$. Для обычных целых $p=16$, для целых двойной дли-

ны $p=32$. Обозначим $M = 2^{p-1}$. Для генерации целых псевдослучайных чисел y_n , $n=1,2,\dots$ будем применять рекуррентный алгоритм вида

$$y_{n+1} = (a \times y_n + c)(\text{mod}8), \quad n=0,1,\dots,$$

где натуральные числа a и c подбирают таким образом, чтобы получающаяся последовательность имела максимальный период. Теория таких алгоритмов, связанная с неприводимыми полиномами и функцией Эйлера, достаточно сложна, поэтому ограничимся лишь практическими рекомендациями этой теории:

1. Начальное значение y_0 может быть выбрано произвольно. Желательны числа подлиннее и с разнообразными цифрами.
2. Выбор числа a должен удовлетворять трем условиям: а) $a(\text{mod} 8) = 5$; б) $M/100 < a < M - \sqrt{M}$; в) двоичные знаки числа a не должны иметь очевидного шаблона.
3. Число c следует выбирать нечетным и таким, чтобы

$$\frac{c}{M} \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.21132.$$

При использовании этого датчика следует помнить, что младшие разряды псевдослучайных чисел y_n будут «менее случайными», чем старшие. Лучший на сегодня известный

авторам выбор значений чисел a и c : $a = 843314861$, $c = 453816693$. Эти значения соответствуют шаблону

$$a = 8 \times [M \times \pi / 64] + 5, \quad c = 2 \times [M \times (3 - \sqrt{3}) / 12] + 1,$$

взятому из книги Дж. Форсайта, М. Малькольма, К. Моулера «Машинные методы математических вычислений» (квадратные скобки $[x]$ означают целую часть числа x). Вот как выглядит подпрограмма-функция указанного датчика псевдослучайных чисел, написанная на языке «C++»

```
double rnd()
{long a = 843314861, c = 453816693, m2 = 1073741824;
 y* = a; y += c;    if ( y < 0 ) y = ( y + m2 ) + m2;
 return double (y) * 0.4656613E - 09;}
```

Здесь y – глобальная переменная, целая двойной длины типа *long*. Подпрограмма *rnd ()* возвращает псевдослучайное число, равномерно распределенное в интервале $(0,1)$, $m2 = M/2 = 2^{30}$.

1.1.2. Детерминированный хаос

Датчики второго типа основаны на теории так называемого детерминированного хаоса, которая в настоящее время очень популярна. Рассмотрим одну из базовых моделей детерминированного хаоса – так называемую модель Фейгенбаума, на которой легче всего иллюстрировать основные

идеи этой теории. Пусть мы имеем последовательность чисел вида $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ с некоторым $r > 0$. Что она собой представляет? Вспомним теорию методов вычислений.

Пусть надо численно решить уравнение $x = f(x)$. Для этого используется итерационный процесс вида $x_{n+1} = f(x_n)$. Показано, что если $|f'(x^*)| < 1$, то этот процесс сходится к x^* , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Если $|f'(x^*)| \geq 1$, то процесс расходится. Посмотрим с этих позиций на процесс Фейгенбаума, для которого $f(x) = rx(1-x)$:

а) при $0 < r < 1$ уравнение $x = rx(1-x)$ имеет единственный корень $x=0$. Так как производная $[rx(1-x)]'_{x=0} = r < 1$, то точка $x=0$ является устойчивой и процесс $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к нулю.

б) при $1 < r < 3$ уравнение $x = rx(1-x)$ имеет два корня: $x_1^* = 0$ и $x_2^* = \frac{r-1}{r}$. Т.к. $[rx(1-x)]'_{x=0} > 1$, то точка $x_1^* = 0$ неустойчива. Далее $[rx(1-x)]' = r(1-2x)$, и точка $x_2^* = \frac{r-1}{r}$ является устойчивой, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_2^*$.

в) при $r > 3$ точка x_2^* станет неустойчивой и для исследования поведения процесса x_n надо найти зависимость $x_{n+2} = f_2(x_n)$. Поскольку

$$x_{n+2} = r x_{n+1} (1 - x_{n+1}) = r^2 x_n (1 - x_n) (1 - r x_n (1 - x_n)),$$

то $f_2(x) = r^2 x (1 - x) (1 - r x (1 - x))$. Теперь уравнение $x = f_2(x)$ будет иметь четыре корня, т.е. четыре стационарные точки, из которых две будут устойчивыми, а две – неустойчивыми. Если обозначить устойчивые точки \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , то с увеличением n процесс x_n , будет колебаться между \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , т.е. траектория процесса x_n будет иметь примерно такой вид, как на рис. 1. Произошла так называемая бифуркация, т.е. раздвоение стационарной точки и $\exists r_2$ такое, что как только r станет больше r_2 , произойдет новая бифуркация и устойчивых точек станет четыре. При $n \rightarrow \infty$ процесс x_n будет пробегать их по циклу $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$. С дальнейшим ростом r бифуркации устойчивых точек будут продолжаться. При n -й бифуркации $r_n = r_\infty - c \delta^{-n}$, где $\delta = 4,669\dots$, $r_\infty = 3,5699456\dots$. При $r_\infty < r < 4$ процесс x_n станет абсолютно хаотическим и его значения будут равномерно заполнять

интервал $(0,1)$ без циклов. При этом детерминированный процесс станет неотличим от случайного.

Можно ввести даже плотность вероятностей $p(x)$ этого процесса. Так как $x_{n+1} = f(x_n)$, то эта плотность удовлетворяет уравнению $p(y) = \int_{\Omega} p(x) \delta(y - f(x)) dx$, которое называется уравнением Фробениуса–Перрона.

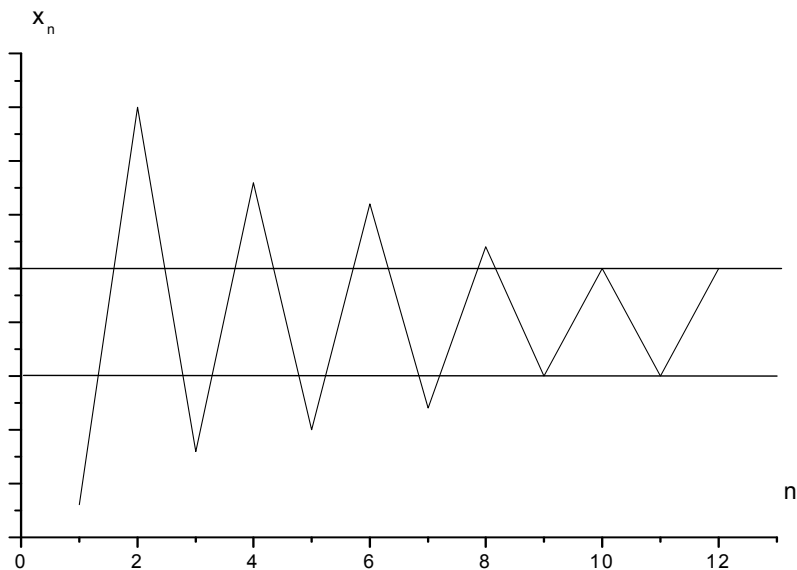


Рис. 1

Хотя решение таких уравнений и сложно, но зная $f(x)$, можно, по крайней мере, численно, найти $p(x)$. А можно поступить

и наоборот, задаваясь функцией $p(x)$, найти $f(x)$, определив тем самым алгоритм генерирования псевдослучайных чисел с заданным распределением вероятностей. Например, пусть $f(x) = 2x - [2x]$, где $[2x]$ – это целая часть числа $2x$. Тогда

$$p(y) = \int_0^{\frac{1}{2}} \delta(y - 2x)p(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \delta(y - 2x + 1)p(x)dx = \frac{1}{2}p\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2}p\left(\frac{y+1}{2}\right).$$

Легко проверить, что этому уравнению удовлетворяет плотность равномерного на интервале $(0,1)$ распределения.

Рассмотрим требования, предъявляемые к базовому датчику и методы проверки этих требований.

1.1.3. Аperiodичность

Наиболее употребительными в настоящее время являются базовые датчики, работающие по рекуррентному алгоритму

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

где $f(\cdot)$ – заданная функция, а x_n – случайное число, $n=0,1,\dots$

Пусть мы задали какое-то случайное число x_0 и начали генерировать последовательность. Она имеет вид $x_0, x_1, \dots, x_{L-T}, x_{L-T+1}, \dots, x_L, \dots$. Вообще говоря, после некоторого числа x_L может снова повториться одно из чисел, которые были ранее, скажем, число x_{L-T} . Тогда после этого датчик начнет перио-

дически повторять последовательность $x_{L-T} \dots x_L$. Величина T называется **периодом** последовательности x_i , а величина L – длиной **отрезка аперIODичности**, $L \geq T$. Заметим, что L зависит от выбора начального числа x_0 . Циклы в случайной последовательности при имитационном моделировании крайне нежелательны, поэтому необходимо до моделирования определить период используемого базового датчика. Делают это следующим образом:

1. Берут число x_0 и большое число N такое, что выборки длины N достаточно для нужд моделирования. Обычно $N = 10^6 - 10^7$. С помощью базового датчика генерируются числа x_1, x_2, \dots, x_N . Число x_N запоминается.

2. Датчик запускается снова с числа x_0 . В процессе генерации каждое новое число сравнивается с x_N . Возможны два варианта:

а) не одно из x_i , $i = 1, \dots, N$ не совпало с x_N . Тогда длина отрезка аперIODичности генерируемой датчиком случайной последовательности $L > N$.

б) с x_N совпадут число x_m и затем число x_n ($m < n < N$). Дальше можно не генерировать, так как ясно, что мы попали на цикл и период $T = n - m$.

3. Для нахождения длины L отрезка аперiodичности датчик запускается параллельно с числа x_0 и с числа x_T и находится минимальный номер k , для которого выполнится условие $x_k = x_{k+T}$. Тогда $L = k + T$.

1.1.4. Проверка равномерности плотности вероятностей

Второй важнейшей проверкой, которую должен пройти датчик, является проверка на равномерность плотности вероятностей получающихся чисел. Различают проверку на одномерную и многомерную равномерность.

Одномерная равномерность. Проверяется гипотеза о том, что одномерная плотность вероятностей $p(x)$ генерируемых псевдослучайных чисел имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Стандартно эта гипотеза проверяется по χ^2 -критерию. Итак, генерируется N случайных чисел (обычно берут N порядка $10^3 - 10^4$). Интервал $(0,1)$ разбивается на k равных частей:

$$\left(0, \frac{1}{n}\right) \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Значение k находят по формуле $k = [1 + 3,3 * \lg N]$, где квадратные скобки означают взятие целой части стоящего в них

числа. Обычно $10 < k < 20$. После этого подсчитывается, сколько чисел попало в каждый интервал. Номер r_i интервала, в который попало число x_i , определяется по формуле $r_i = [k * x_i]$. После этого проверяют гипотезу о равномерности по обычному χ^2 - критерию со статистикой

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{\left(N_i - \frac{N}{k}\right)^2}{\frac{N}{k}},$$

где N_i – число значений x_i , попавших в i -ую часть разбиения интервала $(0,1)$. Число степеней свободы $f = k - 1$.

Двумерная равномерность. В этом случае проверяется гипотеза о том, что двумерная плотность вероятностей имеет вид:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x_1, x_2 < 1, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Для проверки этой гипотезы разобьём снова интервал $(0,1)$ на k частей равной длины. Тогда квадрат $(0,1;0,1)$ разобьётся на k^2 одинаковых квадратов. Сгенерируем с помощью проверяемого датчика $2N$ случайных чисел x_1, \dots, x_{2N} . Разобьем все числа на пары $(x_1, x_2), \dots, (x_{2N-1}, x_{2N})$. Обозначим N_i число пар, попавших в i -ый квадрат разбиения и будем проверять гипотезу о двумерной равномерности по χ^2 – критерию числом

степеней свободы $f = k^2 - 1$ аналогично проверке гипотезы об одномерной равномерности, изменив число классов с k на k^2 . Можно проверять и гипотезу о S -мерной равномерности при $S \geq 3$. При этом генерируется последовательность длины $S \cdot N$, эта последовательность разбивается на N групп по S чисел в каждой и гипотеза проверяется по χ^2 -критерию с числом степеней свободы $f = k^S - 1$.

1.1.5. Проверка корреляционной связи

Независимость, а точнее некоррелированность генерируемых случайных чисел проверяется по автокорреляционной функции. Для равномерно распределенных на интервале $(0,1)$ случайных чисел математическое ожидание равно $1/2$, а дисперсия равна $1/12$. Для проверки некоррелированности генерируют достаточно длинную последовательность чисел x_1, \dots, x_N и вычисляют значения

$$r_k = \frac{12}{N - k} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - 0.5)(x_{i+k} - 0.5)$$

для $k = 1, 2, \dots, k < N / 2$. Затем для каждого из найденных значений r_k проверяется гипотеза $H: r_k = 0$. Стандартно такие гипотезы проверяются по критерию Стьюдента с числом степеней свободы $f = N - k - 2$ и статистиками

$$t_k = \frac{r_k}{\sqrt{1-r_k^2}} \sqrt{N-k-2}.$$

При больших N и малых k можно взять пороговое значение критерия $t_{\alpha,f}=1,96$ для $\alpha=0,05$, $t_{\alpha,f}=2,36$ при $f=100$ и $\alpha=0,01$ при проверке вручную или проверять выборку на автокоррелированность в пакете «Statistica».

Задание для самостоятельной работы

С помощью датчика, предложенного в пункте 1.1.1, стр.13, сгенерировать выборку значений случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(0,1)$, и проверить требования, предъявляемые к базовому датчику: найти отрезок апериодичности, проверить по χ^2 -критерию одномерную равномерность при 5%-ном уровне значимости, проверить автокоррелированность случайных чисел в полученной выборке.

1.2. Моделирование случайных событий

Пусть необходимо генерировать **случайное событие** A с известной вероятностью $P(A)=p$ и α – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0,1)$. В соответствии с геометрическим определением вероятности события $P\{\alpha < p\}=p$. Поэтому с помощью базового датчика генерируется значение случайной величины α и если $\alpha < p$, то собы-

тие A наступило, в противном случае – наступило событие \bar{A} . Это правило удовлетворительно работает при $0.1 < p < 0.9$. При $p < 0.1$ рекомендуется представлять p в виде произведения $p = p_1 p_2 \dots p_k$ и принимать решение о том, что событие A наступило, когда $(\alpha_1 < p_1) \wedge (\alpha_2 < p_2) \wedge \dots \wedge (\alpha_k < p_k)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – это разные реализации случайной величины с равномерным на $(0, 1)$ распределением. Также поступают, когда $p > 0.9$.

Если необходимо генерировать **полную группу попарно несовместных событий** A_1, \dots, A_m , наступающих с вероятностями p_1, \dots, p_m , поступают следующим образом. Интервал $(0, 1)$ разбивают на части точками $p_1, p_1 + p_2, \dots, p_1 + \dots + p_{m-1}$, вводят $p_0 = 0$ и принимают решение о том, что наступило событие A_k , если выполнится условие

$$\sum_{i=0}^{k-1} p_i < \alpha < \sum_{i=0}^k p_i .$$

1.3. Общие методы генерирования значений дискретных случайных величин

Пусть необходимо генерировать значения дискретной случайной величины X , принимающей значения x_0, x_1, \dots, x_n с вероятностями p_0, p_1, \dots, p_n , $p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$. Эта дис-

кретная случайная величина генерируется аналогично полной группе попарно несовместных событий. Пусть мы имеем массив, где записаны значения вероятностей p_0, p_1, \dots, p_n . Возможны три способа генерации: прямой ход, обратный ход и комбинированный способ.

В первом способе (**прямой ход**) просмотр массива вероятностей $p[i]$, $i = \overline{0, n}$ идет по увеличению индекса i . Блок-схема алгоритма приведена на рис. 2.

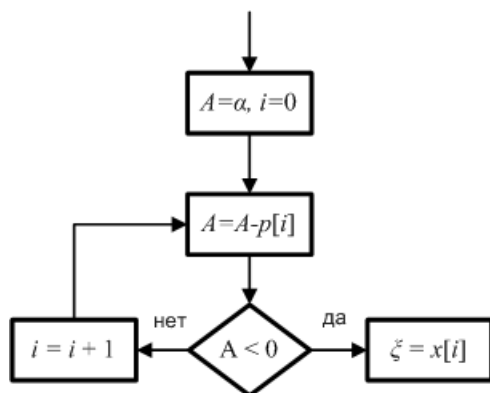


Рис. 2

Работа алгоритма начинается с генерации базовым датчиком значения случайной величины α , равномерно распределенной в $(0,1)$. Эта схема требует организации массива вероятностей $p[i]$, $i = \overline{0, n}$. Если можно получить рекуррентную формулу

$p_{m+1} = p_m \times r(m)$, $m = \overline{0, n-1}$, то хранить массив вероятностей нет необходимости, а следует завести скалярную переменную P , которой сначала присвоить значение p_0 , а затем на каждом шаге цикла пересчитывать ее значение по формуле $P = P \times r(m)$. Получим формулы $r(m)$ для некоторых распределений.

Биномиальное распределение с параметрами n и p

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad p_0 = (1-p)^n,$$

$$r(m) = \frac{p_{m+1}}{p_m} = \frac{n! p^{m+1} (1-p)^{n-m-1} m! (n-m)!}{(m+1)! (n-m-1)! n! p^m (1-p)^{n-m}} = \frac{p}{1-p} \frac{n-m}{m+1}$$

Распределение Пуассона с параметром λ

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad p_0 = e^{-\lambda}, \quad r(m) = \frac{\lambda^{m+1} e^{-\lambda} m!}{(m+1)! \lambda^m} = \frac{\lambda}{m+1}.$$

Геометрическое распределение с параметром p

$$p_m = P\{X = m\} = p(1-p)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad p_0 = p,$$

$$r(m) = \frac{p(1-p)^{m+1}}{p(1-p)^m} = 1-p.$$

Гипергеометрическое распределение с параметрами N, n, l

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{C_n^m C_{N-n}^{l-m}}{C_N^l}, \quad \max(0, n+l-N) \leq m \leq \min(n, l),$$

$$p_0 = \frac{C_{N-n}^l}{C_N^l}, \quad r(m) = \frac{C_n^{m+1} C_{N-n}^{l-m-1} C_N^l}{C_N^l C_n^m C_{N-n}^{l-m}} = \frac{n-m}{m+1} \frac{l-m}{N-n-l+m+1}.$$

Отрицательное биномиальное распределение с параметрами r, p

$$p_m = P\{X = m\} = C_{m+r-1}^m p^r (1-p)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad p_0 = p^r,$$

$$r(m) = \frac{C_{m+r}^{m+1} p^r (1-p)^{m+1}}{C_{m+r-1}^m p^r (1-p)^m} = (1-p) \frac{m+r}{m+1}.$$

Во втором способе (**обратный ход**) просмотр массива вероятностей идет от конца к началу, т.е. по убыванию индекса m .

Блок-схема алгоритма в этом случае представлена на рис. 3.

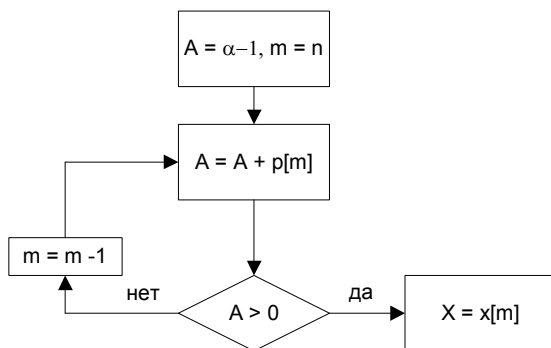


Рис. 3

И здесь можно обойтись без организации массива $p[m]$,

$m=0, 1, \dots, n$, если найти $\bar{r}(m) = \frac{1}{r(m-1)}$ и на каждом шаге

цикла пересчитывать вероятность по рекуррентной формуле

$$p_{m-1} = p_m \times \bar{r}(m).$$

Наиболее эффективным считается **комбинированный способ**, когда перебор элементов массива $x[m]$ начинается с того значения m , для которого вероятность p_m максимальна или находится в районе максимума. Пусть p_l – наибольшая вероятность. Обозначим $Q = \sum_{m=0}^l p_m$. Тогда, если $\alpha \geq Q$, то перебор идёт по возрастанию m , начиная с $m=l+1$. Если же $\alpha < Q$, то перебор идёт по убыванию m , начиная с $m=l$. Блок-схема этого алгоритма приведена на рис. 4.

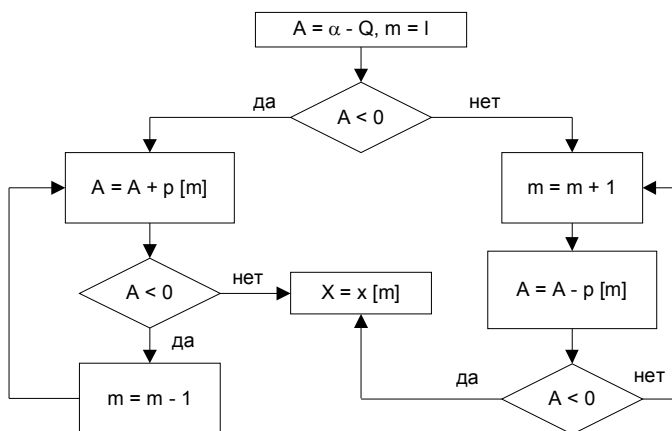


Рис. 4

Для некоторых распределений есть рекомендации по выбору значения индекса максимальной вероятности l . Так для

биномиального распределения следует брать $l = [np]$, а для пуассоновского распределения $l = [\lambda]$, квадратные скобки, как и выше, означают, что берется целая часть числа.

1.4. Специальные методы генерирования дискретных случайных величин

Для некоторых распределений дискретных случайных величин существуют специальные методы генерирования, не требующие использования итерационных алгоритмов.

Дискретное равномерное распределение. Пусть случайная величина X принимает значения $0, 1, \dots, n$ с одинаковыми вероятностями $\frac{1}{n+1}$. Тогда значение случайной величины X можно генерировать по правилу $X = [\alpha \times (n+1)]$, где α – значение случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$.

Геометрическое распределение. Пусть вероятность того, что случайная величина X приняла значение n , $n = 0, 1, \dots$ равна $P\{X = n\} = p(1-p)^n$. Тогда значение случайной вели-

чины X можно генерировать по правилу $X = \left[\frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} \right]$,

где α – значение равномерно распределенной в интервале $(0,1)$ случайной величины, а квадратные скобки означают целую часть числа.

Отрицательное биномиальное распределение. Случайная величина X , имеющая отрицательное биномиальное распределение с параметрами p, r – это сумма r независимых случайных величин, каждая из которых имеет геометрическое распределение с параметром p . Поэтому значение случайной величины X генерируется по правилу

$$X = \sum_{i=1}^r \left[\frac{\ln \alpha_i}{\ln(1-p)} \right],$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ независимые реализации случайной величины, имеющей равномерное распределение на $(0,1)$, полученные r – кратным обращением к базовому датчику.

Биномиальное распределение. Биномиальное распределение возникает в схеме повторения опытов, поэтому естественно моделировать его по этой схеме. Обозначим

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда случайную величину X , имеющую биномиальное распределение с параметрами n , p , можно генерировать по правилу $X = \sum_{i=1}^n \theta(p - \alpha_i)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ независимые реализации случайной величины, имеющей равномерное распределение в интервале $(0,1)$.

Пуассоновское распределение. Случайную величину X , имеющую пуассоновское распределение с параметром λ , можно генерировать по правилу $X = \min \left\{ m: \prod_{i=0}^m \alpha_i < e^{-\lambda} \right\}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ независимые реализации случайной величины, равномерно распределенной на $(0,1)$.

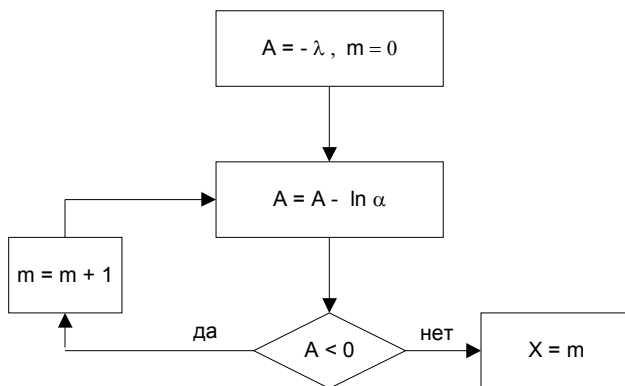


Рис. 5

Если прологарифмировать почленно неравенство $\prod_{i=0}^m \alpha_i < e^{-\lambda}$,

то алгоритм принимает более удобную для программирования

форму $X = \min \left\{ m : \sum_{i=0}^m \ln \alpha_i < -\lambda \right\}$.

Блок-схема последнего варианта алгоритма генерирования пуассоновской случайной величины X приведена на рис. 5.

Задание для самостоятельной работы

1) Написать подпрограммы:

а) генерирования одной реализации дискретной случайной величины с заданным рядом распределения $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, \dots, n$ комбинированным методом.

б) генерирования одной реализации случайных величин с дискретным равномерным, геометрическим, биномиальным, пуассоновским распределениями специальными методами

2) Сформировать выборку объема 1000 значений дискретной случайной величины с заданным рядом распределения и сравнить относительные частоты значений x_i с теоретическими вероятностями $p_i, i = 1, \dots, n$.

3) Сформировать выборки объема 1000 значений случайных величин с дискретным равномерным, геометрическим, биномиальным, пуассоновским распределениями. По χ^2 -критерию при заданном 5%-ном уровне значимости проверить соответствие полученных значений случайных величин выбранным распределениям.

Сравнить теоретические и выборочные среднее и дисперсию.

1.5. Общие методы генерирования непрерывных случайных величин

Метод обратной функции. Пусть α – случайная величина, распределённая равномерно в интервале $(0,1)$, а ξ – нужная нам случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Нам нужно найти функцию вида $\xi = \varphi(\alpha)$, чтобы генерировать случайную величину ξ .

Пусть сначала $\varphi(\alpha) \uparrow$. Тогда имеем

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\varphi(\alpha) < x\} = P\{\alpha < \varphi^{-1}(x)\} = \varphi^{-1}(x).$$

Поэтому $\varphi^{-1}(x) = F(x)$, $\varphi(x) = F^{-1}(x)$ и $\xi = F^{-1}(\alpha)$.

Пусть $\varphi(\alpha) \downarrow$. Тогда имеем

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\varphi(\alpha) < x\} = P\{\alpha > \varphi^{-1}(x)\} = 1 - \varphi^{-1}(x).$$

При $x = \varphi(\alpha)$, $\varphi^{-1}(x) = \alpha$, $F(x) = 1 - \alpha$ и $x = F^{-1}(1 - \alpha)$, тогда $\xi = \varphi(\alpha) = F^{-1}(1 - \alpha)$. В силу того, что случайная величина $1 - \alpha$ имеет равномерное распределение на $(0,1)$, формулы, полученные для монотонно возрастающей и монотонно убывающей $\varphi(\alpha)$ равнозначны. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть ξ – случайная величина, имеющая **экспоненциальное распределение** с плотностью вероятностей

$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$. Функция распределения величины ξ

$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$, и находя ξ из

уравнения $1 - e^{-\lambda \xi} = \alpha$, получаем $\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha)$. Тогда

значение случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ , генерируется по формуле

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha.$$

Пример 2. Пусть ξ – случайная величина, имеющая **распределение Релея** с плотностью вероятностей

$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x \geq 0$ и функцией распределения

$F(x) = \int_0^x \frac{u}{\sigma^2} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Решая относительно ξ урав-

нение $1 - e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} = 1 - \alpha$, получим формулу

$$\xi = \sigma \sqrt{-2 \ln \alpha}.$$

Пример 3. Пусть имеется группированная выборка объема N значений случайной величины ξ на промежутке $[x_0, x_n]$ и по этой выборке построена гистограмма относительных частот с вариантами x_i и частотами ω_i причем все

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x, \quad i = 1, \dots, n. \quad \text{Если положить } y_i = \frac{\omega_i}{\Delta x},$$

$i = 1, \dots, n$, то $\sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i = 1$ и эмпирическая функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} y_1(x - x_0), & x_0 \leq x < x_1, \\ y_2(x - x_1) + y_1(x_1 - x_0), & x_1 \leq x < x_2, \\ \dots & \dots \\ y_n(x - x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i(x_i - x_{i-1}), & x_{n-1} \leq x < x_n. \end{cases}$$

Для нахождения значения $\varphi(\alpha)$ из уравнения $\alpha = F(\xi)$ поступают так. Сначала генерируют случайное число α и присваивают его значение переменной M . Затем из M последовательно вычитают величины $y_1(x_1 - x_0)$, $y_2(x_2 - x_1), \dots, y_n(x_n - x_{n-1})$ пока на каком-то k -ом шаге не получится отрицательное число.

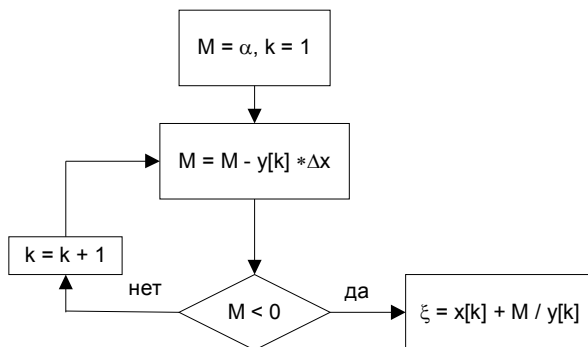


Рис. 6

Это будет означать, что $M + y_k (x_k - \xi) = 0$ или $\xi = x_k + \frac{M}{y_k}$,

где значение k может быть любым от 1 до n . Блок-схема этого алгоритма приведена на рис. 6.

Задание для самостоятельной работы

Написать программу генерирования одной реализации случайной величины $\xi \in (0, 7)$ по гистограмме с шагом $\Delta x = 1$ и частотами (2, 6, 11, 17, 8, 5, 1).

Метод суперпозиции. Пусть имеется двумерная случайная величина (ξ, η) с условной плотностью вероятностей $p_{\xi\eta}(x | y)$. Пусть $F_\eta(y)$ – функция распределения случайной величины η . Тогда плотность вероятностей случайной величины ξ можно получить по формуле

$$p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x|y) dF_{\eta}(y)$$

В частности, если η – дискретная случайная величина такая, что $P\{\eta = \eta_i\} = p_i$, $i = 1, \dots, n$, то $p_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^n p_i p_i(x)$, где $p_i(x) = p(x|\eta_i)$.

Если известна плотность вероятностей $p_{\eta}(y)$ непрерывной случайной величины η , то

$$p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x|y) p_{\eta}(y) dy.$$

Пусть мы умеем генерировать случайную величину η с плотностью вероятностей $p_{\eta}(y)$ и, зная значение $\eta = y$, умеем генерировать случайную величину ξ с плотностью вероятностей $p_{\xi\eta}(x|y)$. Тогда генерация ξ осуществляется в два этапа:

1) сначала генерируется значение y случайной величины η , имеющей плотность вероятностей $p_{\eta}(y)$ или ряд распределения $P\{\eta = \eta_i\} = p_i$, $i = 1, \dots, n$.

2) Затем генерируется значение ξ , имеющей плотность вероятностей $p_{\eta}(y) \cdot p_{\xi\eta}(x|y)$. Рассмотрим **примеры**:

1. Пусть случайная величина ξ имеет **гиперэкспоненциальное распределение** с плотностью вероятностей

$$p_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^n p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad x \geq 0.$$

Тогда согласно методу суперпозиции значение ξ генерируется в два этапа. Сначала генерируется значение i дискретной случайной величины η с рядом распределения $P\{\eta = i\} = p_i, i = 1, \dots, n$. Далее значение случайной величины ξ определяется по формуле

$$\xi = -\frac{\ln \alpha}{\lambda_i},$$

где α – значение случайной величины с равномерным на интервале $(0, 1)$ распределением.

2. Пусть плотность вероятностей случайной величины ξ имеет вид $p_{\xi}(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k, a_k \geq 0, 0 \leq x \leq 1$.

Приведём $p_{\xi}(x)$ к виду

$$p_{\xi}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)} (k+1) x^k = \sum_{k=0}^n p_k (k+1) x^k.$$

Заметим, что функция $p_k(x) = (k+1)x^k, 0 \leq x \leq 1$, обладает всеми свойствами плотности вероятностей, и ей соответствует функция распределения

$$F_k(x) = \int_0^x p_k(x) dx = x^{k+1}.$$

Если k задано, то $\xi^{k+1} = \alpha$ и генерация соответствующей случайной величины ξ идёт по формуле

$$\xi = \sqrt[k+1]{\alpha} = \exp\left(\frac{\ln \alpha}{k+1}\right).$$

Поэтому генерация ξ идёт в два этапа: на первом этапе по ряду распределения $P\{\eta = k\} = p_k$, $k = \overline{0, n}$ генерируется значение k дискретной случайной величины η , на втором этапе вычисляется значение $\xi = \sqrt[k+1]{\alpha}$.

3. Известно, что

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y} - \lambda y} \lambda dy = 2\lambda K_0(2\sqrt{\lambda x}), \quad x, y, \lambda > 0,$$

где $K_0(2\sqrt{\lambda x})$ – функция Бесселя нулевого порядка (функция Макдональда). Поэтому, чтобы сгенерировать случайную величину с плотностью вероятностей $p(x) = 2\lambda K_0(2\sqrt{\lambda x})$, нужно:

а) получить значение случайной величины η с плотностью вероятностей $p_\eta(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ по формуле $\eta = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha_1$, где величина α_1 равномерно распределена в интервале $(0, 1)$;

б) получив значение $\eta = y$, сгенерировать случайную величину ξ с плотностью вероятностей $p_{\xi}(x|y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$ по формуле $\xi = -y \ln \alpha_2$, где величина равномерно распределена в интервале $(0,1)$.

Задание для самостоятельной работы

Написать программу генерирования методом суперпозиции одной реализации случайной величины ξ с известной плотностью вероятностей

$$p_{\xi}(x) = \frac{5}{8} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2}, 0 \leq x \leq 1.$$

Метод исключения.

Рассмотрим функцию $g(x)$ такую, что:

1) $g(x) \geq 0$,

2) сходится несобственный интеграл $G = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx < +\infty$

3) область $(G) = \{(x, y) : 0 \leq y \leq g(x)\}$ имеет площадь G .

Теорема 1. Пусть двумерная случайная величина (ξ, η) имеет совместную плотность вероятностей

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 1/G, & (x, y) \in (G), \\ 0, & (x, y) \notin (G), \end{cases}$$

т.е. пара (ξ, η) имеет равномерное распределение в области (G) . Тогда $p_{\xi}(x) = g(x)/G$.

Доказательство. Найдем функцию распределения случайной величины ξ

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} &= \int_{-\infty}^x d\xi \int_0^{g(\xi)} p_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\eta = \frac{1}{G} \int_{-\infty}^x d\xi \int_0^{g(\xi)} d\eta = \\ &= \frac{1}{G} \int_{-\infty}^x g(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Теперь плотность вероятностей случайной величины ξ определится формулой $p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = g(x)/G$ и теорема доказана.

Заметим, что обычно $g(x)$ является плотностью вероятностей случайной величины, которую необходимо генерировать, так что обычно $G=1$. Итак, идея метода исключения состоит в том, чтобы генерировать случайные пары (ξ, η) , распределённые равномерно в (G) , и брать из пары только значение ξ . Это и будет значение случайной величины с плотностью вероятностей $p_{\xi}(x) = g(x)$. Представим себе, что область (G) находится внутри аналогичной области

$$(G_1) = \{(x, y), \quad 0 \leq y \leq g_1(x)\}$$

конечной площади G_1 , где $G_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) dx < +\infty$, $g_1(x) \geq g(x)$.

И пусть генерировать пары (ξ, η) , равномерно распределённые в (G_1) , не составляет труда.

Покажем, что любая случайная пара (ξ, η) , равномерно распределенная в (G_1) , будет также равномерно распределена и в (G) . Для этого рассмотрим произвольную область (S) , $(S) \subset (G) \subset (G_1)$. Тогда согласно геометрическому определению вероятности и в силу равномерности распределения случайной пары (ξ, η) в (G_1) получим

$$P\{(\xi, \eta) \in (S) | (\xi, \eta) \in (G)\} = \frac{P\{(\xi, \eta) \in (S) \wedge (\xi, \eta) \in (G)\}}{P\{(\xi, \eta) \in (G)\}} = \frac{S/G_1}{G/G_1} = \frac{S}{G},$$

откуда и следует, что случайная пара (ξ, η) равномерно распределена в (G) . Общий алгоритм генерирования случайной величины ξ с плотностью вероятностей $p_\xi(x) = g(x)/G$ выглядит так: генерирование случайных пар (x, y) , равномерно распределенных в области (G_1) , продолжается до тех пор, пока не получится пара, принадлежащая (G) . Значение x из этой пары и есть искомая реализация случайной величины ξ .

Пример. Пусть функция $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и $\int_a^b g(x) dx = 1$.

Обозначим $M = \max_{a \leq x \leq b} g(x)$ и рассмотрим в качестве области (G_1) прямоугольник $[a, b; 0, M]$. Пусть случайные величины

α_1 и α_2 независимы и равномерно распределены в интервале $(0,1)$. Тогда случайная пара (ξ, η) , где $\xi = a + (b - a)\alpha_1$, $\eta = \alpha_2 M$, равномерно распределена в прямоугольнике (G_1) . Блок-схема алгоритма метода исключения для генерирования случайной величины ξ с плотностью вероятностей $p_\xi(x) = g(x)$ приведена на рис. 7.

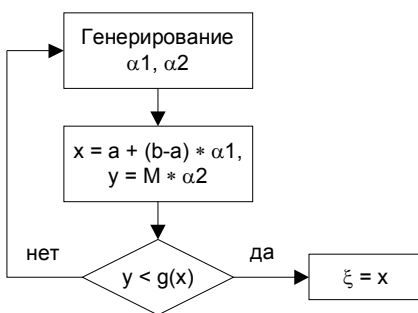


Рис. 7

1.6. Генерирование значений нормальных случайных величин

Рассмотрим методы генерирования случайной величины η , имеющей стандартное нормальное распределение, т.е. нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией.

Метод суммирования.

Этот метод основан на центральной предельной теореме теории вероятностей, согласно которой, если случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ независимы и одинаково распределены со средними $M\{\alpha_i\} = a$ и дисперсиями $D\{\alpha_i\} = \sigma^2$, то величина

$$\zeta_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n a}{\sigma \sqrt{n}}$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине η . Возьмем в качестве величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ равномерно распределенные в интервале $(0,1)$ случайные величины, генерируемые базовым датчиком. Поскольку $M\{\alpha_i\} = \frac{1}{2}$, $D\{\alpha_i\} = \frac{1}{12}$, то в качестве статистики, имеющей приближенно стандартное нормальное распределение, берут величину

$$\zeta_n = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 0.5) = \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{n}{2} \right).$$

Обычно полагают $n = 12$, тогда ζ_n имеет особенно простой вид $\zeta_{12} = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i - 6$. Для большей точности вводят поправки. Чаще всего при $n = 12$ используют статистику

$$\zeta_n^* = \zeta_n + \frac{1}{20n}(\zeta_n^3 - 3\zeta_n), \text{ реже – статистику}$$

$$\zeta_n^* = \zeta_n - \frac{41}{13440n^2}(\zeta_n^5 - 10\zeta_n^3 + 15\zeta_n).$$

Метод обратной функции.

Стандартная нормальная случайная величина имеет функцию распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

и обладает свойством $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Согласно методу обратной функции стандартная нормальная случайная величина ζ может быть получена по формуле $\zeta = \Phi^{-1}(\alpha)$, где α – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0,1)$. То, что функция $\Phi^{-1}(x)$ обладает свойством $\Phi^{-1}(1-\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$, упрощает генерацию стандартных нормальных случайных величин, которая идёт по правилу

$$\zeta = \begin{cases} \Phi^{(-1)}(\alpha) & , \quad \text{если } 1/2 \leq \alpha < 1, \\ -\Phi^{(-1)}(1-\alpha) & , \quad \text{если } 0 < \alpha \leq 1/2. \end{cases}$$

Значение $\Phi^{-1}(\alpha)$ точно считать очень трудно, поэтому для него найдены хорошие аппроксимации. Пусть α удовлетворяет условию $0.5 \leq \alpha < 1$.

Введем переменную $\theta = \sqrt{-2 \ln \alpha}$, тогда

$$\Phi^{(-1)}(\alpha) = \frac{2.30753 + 0.27061 \theta}{1 + 0.99229 \theta + 0.04481 \theta^2} - \theta$$

или

$$\Phi^{(-1)}(\alpha) = \frac{2.515517 + 0.802853 \theta + 0.010328 \theta^2}{1 + 1.432788 \theta + 0.189269 \theta^2 + 0.001308 \theta^3} - \theta.$$

Первая из этих формул имеет погрешность, не превосходящую 0,003., погрешность второй формулы составляет не более 0,00045.

Метод генерирования стандартных нормальных случайных величин парами.

Пусть α_1, α_2 независимые, равномерно распределённые в интервале (0,1) случайные величины с двумерной совместной плотностью вероятностей

$$p(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим случайные величины

$$\zeta_1 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \cos(2\pi \alpha_2), \quad \zeta_2 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \sin(2\pi \alpha_2)$$

и найдём их совместную плотность вероятностей $p(\zeta_1, \zeta_2)$.

Выражая α_1, α_2 через ζ_1, ζ_2 , получим

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = -2 \ln \alpha_1, \quad \alpha_1 = \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}(2\pi\alpha_2) = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\zeta_2}{\zeta_1}.$$

Находим якобиан перехода $J = \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha_1}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial\zeta_2} \\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial\zeta_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\zeta_1 \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right) & -\zeta_2 \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{-\zeta_2/\zeta_1^2}{1 + \zeta_2^2/\zeta_1^2} & \frac{1}{2\pi} \frac{1/\zeta_1}{1 + \zeta_2^2/\zeta_1^2} \end{vmatrix}$$

$$J = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}} \left[-\frac{1}{1 + \zeta_2^2/\zeta_1^2} - \frac{\zeta_2^2/\zeta_1^2}{1 + \zeta_2^2/\zeta_1^2} \right] = -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right).$$

Отсюда, по формулам теории вероятностей, получаем

$$\begin{aligned} p(\zeta_1, \zeta_2) &= p_\alpha(\alpha_1(\zeta_1, \zeta_2), \alpha_2(\zeta_1, \zeta_2)) |J| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta_1^2}{2}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\zeta_2^2}{2}}, \end{aligned}$$

откуда и следует, что ζ_1, ζ_2 – это независимые стандартные нормальные случайные величины. Таким образом, пара реализаций стандартных нормальных случайных величин получается указанным выше преобразованием пары реализаций равномерных на интервале $(0,1)$ случайных величин.

После получения реализации стандартной нормальной случайной величины η , мы сможем найти реализацию случайной величины ξ , имеющей нормальное распределение со средним $M\{\xi\} = a$ и дисперсией $D\{\xi\} = \sigma^2$ как линейное преобразование $\xi = a + \sigma\eta$.

Задание для самостоятельной работы

1) Написать подпрограммы генерирования одной реализации случайной величины ξ , имеющей нормальное распределение со средним $M\{\xi\} = a$ и дисперсией $D\{\xi\} = \sigma^2$, методами суммирования, обратной функции и парного генерирования.

2) Сформировать выборки объема 1000 значений нормальной случайной величины указанными тремя методами генерирования. По χ^2 -критерию при заданном 5%-ном уровне значимости проверить гипотезу о нормальности. Сравнить теоретические и выборочные среднее и дисперсию. По результатам статистической обработки выборок выбрать лучший из трех методов генерирования нормальной случайной величины.

1.7. Генерирование значений случайных величин с бета- и гамма-распределениями

Плотность вероятностей случайной величины ξ , имеющей **В-распределение**, $p_{\xi}(x) = \frac{x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}}{B(\mu, \nu)}$, $0 \leq x \leq 1$,

где $V(\mu, \nu)$ – бета-функция Эйлера, $\mu > 0, \nu > 0$.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть μ, ν **целые числа**.

Тогда для получения реализации случайной величины ξ , имеющей В-распределение с параметрами μ и ν необходимо с помощью базового датчика сгенерировать $\mu + \nu - 1$ реализаций равномерных на $(0, 1)$ случайных величин и упорядочить их по возрастанию

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_\mu < \alpha_{\mu+1} < \dots < \alpha_{\mu+\nu-1}.$$

Порядковая статистика α_μ и будет искомой реализацией случайной величины ξ .

2. Пусть μ и ν **произвольные положительные числа**.

Будем генерировать равномерно распределенные в интервале $(0,1)$ числа парами $\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4; \alpha_5, \alpha_6; \dots$. Для этой последовательности пар найдем величину

$$k = \min \left\{ n : n \geq 1, \alpha_{2n-1}^\mu + \alpha_{2n}^\nu \leq 1 \right\}.$$

Тогда реализацию случайной величины, имеющей В-распределение с параметрами μ, ν , получают по формуле

$$\xi = \frac{\alpha_{2k-1}^{\frac{1}{\mu}}}{\alpha_{2k-1}^{\frac{1}{\mu}} + \alpha_{2k}^{\frac{1}{\nu}}}.$$

Пусть теперь ξ_ν – случайная величина, имеющая **Г-распределение** с плотностью вероятностей

$$p_\nu(x) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-x}, \quad x \geq 0, \nu > 0,$$

где $\Gamma(\nu)$ – это гамма-функция Эйлера с параметром $\nu > 0$. С помощью преобразований Лапласа плотностей вероятностей легко доказывается, что сумма независимых и имеющих Г – распределение с параметрами μ и ν случайных величин ξ_μ и ξ_ν также имеет Г – распределение с параметром $\mu + \nu$, т.е. $\xi_\mu + \xi_\nu = \xi_{\mu+\nu}$.

Рассмотрим теперь возможные случаи.

1. Пусть $\nu = 1$. В этом случае плотность вероятностей Г – распределения имеет вид $p_1(x) = e^{-x}$ и соответствующая функция распределения $F_1(x) = \int_0^x p_1(x) dx = 1 - e^{-x}$. Поэтому по методу обратной функции реализация случайной величины ξ_1 определяется соотношением $F_1(\xi_1) = 1 - e^{-\xi_1} = 1 - \alpha$,

где α – равномерно распределённая в $(0,1)$ случайная величина. Получается $\xi_1 = -\ln \alpha$.

2. Если $\nu = n$, где n – целое число, то согласно упомянутому выше свойству Γ -распределения, имеем

$$\xi_n = \underbrace{\xi_1 + \xi_1 + \dots + \xi_1}_{n \text{ раз}} = -\sum_{i=1}^n \ln \alpha_i.$$

3. При полуцелом $\nu = n + \frac{1}{2}$ $\xi_{n+1/2} = \xi_n + \xi_{1/2}$. Покажем,

как генерировать случайную величину $\xi_{1/2}$. Для неё имеем

$$p_{1/2}(x) = \frac{x^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)} e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x}, \text{ так как } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

С другой стороны, рассмотрим случайную величину $\xi = \zeta^2 / 2$, где ζ – стандартная нормальная случайная величина с плотностью вероятностей

$$p_\zeta(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

Теперь $\zeta = \pm\sqrt{2\xi}$, $\frac{d\zeta}{d\xi} = \pm\frac{1}{\sqrt{2\xi}}$, и в соответствии с формулой теории вероятностей для плотности вероятностей преобразования случайной величины ξ

$$\begin{aligned}
 p_{\xi}(x) &= p_{\zeta}(\sqrt{2x}) \left| \frac{1}{\sqrt{2x}} \right| + p_{\zeta}(-\sqrt{2x}) \left| -\frac{1}{\sqrt{2x}} \right| = \\
 &= e^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2x}} + e^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x},
 \end{aligned}$$

то есть $\xi_{1/2} = \zeta^2 / 2$. Поэтому окончательно

$$\xi_{n+1/2} = -\sum_{i=1}^n \ln \alpha_i + \frac{\zeta^2}{2}, \text{ где } \zeta \text{ – стандартная нормальная величина.}$$

чина.

4. Пусть ν произвольное положительное число.

Прежде всего, отметим, что произвольное $\nu > 0$ можно представить в виде $\nu = [\nu] + \text{frac}(\nu)$, где $[\nu] = n$ – целая часть ν , а $\text{frac}(\nu)$ – дробная часть ν . Значение ξ_n для целых n мы генерировать уже умеем. Так как $0 \leq \text{frac}(\nu) < 1$, то надо лишь показать, как генерировать случайную величину ξ_{ν} , имеющую Γ -распределение с параметром $0 < \nu < 1$. В силу

очевидного равенства $x^{\nu-1} = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{y^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} dy$ плотность

$p_{\nu}(x)$ можно записать в виде

$$p_{\nu}(x) = \frac{x^{\nu-1} e^{-x}}{\Gamma(\nu)} = \int_0^1 (1+y) e^{-x(1+y)} \frac{y^{-\nu}}{(1+y)\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} dy.$$

Предположим сначала, что мы умеем генерировать случайную величину ζ с плотностью вероятностей

$$p_{\zeta}(y) = \frac{y^{-\nu}}{(1+y)\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}, \quad y > 0.$$

Тогда генерировать случайную величину ξ с плотностью вероятностей $p_{\xi}(x)$ можно методом суперпозиции, т.е. следующим образом: сначала генерировать значение y случайной величины ζ с плотностью вероятностей $p_{\zeta}(y)$, а затем при известном значении y генерируется значение x случайной величины ξ с условной плотностью вероятностей $p_{\xi}(x|y) = (1+y)e^{-x(1+y)}$ по правилу

$$x = -\frac{1}{1+y} \ln \alpha,$$

где α – равномерная в интервале $(0,1)$ случайная величина. Покажем, как генерировать случайную величину ζ с плотностью вероятностей $p_{\zeta}(y)$. Для этого рассмотрим

переменную $z = \frac{y}{1+y}$. Очевидно, что

$$y = \frac{z}{1-z}; \quad 1+y = \frac{1}{1-z}; \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{(1-z)^2}, \text{ и поэтому}$$

$$p(z) = p_{\zeta} \left(\frac{z}{1-z} \right) \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{(1-z)^{-\nu} z^{-\nu} (1-z)}{\Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu) (1-z)^2} =$$

$$= \frac{z^{(1-\nu)-1} (1-z)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu)}.$$

Получилась плотность вероятностей **B**-распределения с параметрами $1-\nu, \nu$. Генерировать это распределение мы уже умеем. Поэтому значение x случайной величины ξ_{ν} при $0 < \nu < 1$ будем получать по формуле $x = (z-1) \ln \alpha$, где z – значение случайной величины, имеющей **B** – распределение с параметрами $1-\nu$ и ν , α – значение случайной величины, равномерно распределенной в $(0,1)$.

Задание для самостоятельной работы

1) Написать подпрограммы генерирования одной реализации случайных величин ξ и η , имеющих бета- и гамма-распределения с заданными произвольными значениями параметров.

2) Сформировать выборки объема 1000 значений случайных величин с бета- и гамма-распределениями. По χ^2 -критерию при 5%-ном уровне значимости проверить гипотезу о виде распределения. Сравнить теоретические и выборочные среднее и дисперсию.

1.8. Генерирование значений случайных величин других типов

Ниже через η будем обозначать стандартную нормальную случайную величину, $\eta \sim N(0,1)$, через α – равномерно распределённую в интервале $(0,1)$ случайную величину.

Распределение Релея имеет плотность вероятностей

$$p(z) = \frac{z}{\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \quad z \geq 0$$

и случайная величина ζ , имеющая эту плотность вероятностей, генерируется одним из двух способов:

$$\zeta = \sigma \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} = \sigma \sqrt{-2 \ln \alpha}$$

Распределение Релея–Райса имеет плотность вероятностей

$$p(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{z a}{\sigma^2}\right)$$

и правило генерирования значения случайной величины с таким распределением имеет вид

$$\zeta = \sqrt{(\sigma \eta_1 + a)^2 + \sigma^2 \eta_2^2}$$

Плотность вероятностей χ^2 – **распределения** с n степенями свободы

$$p(z) = \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{z}{2}}, \quad z \geq 0,$$

и случайная величина θ_n , имеющая эту плотность вероятностей, генерируется по правилу $\theta_n = \sum_{i=1}^n \eta_i^2$.

Распределение Стьюдента с n степенями свободы случайной величины ζ_n имеет плотность вероятностей

$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

и генерируется по правилу $\zeta_n = \sqrt{n} \frac{\eta}{\sqrt{\theta_n}}$, где $\eta \sim N(0,1)$, а θ_n

имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы.

Распределение Фишера имеет плотность вероятностей

$$p(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad z \geq 0.$$

Если m и n – целые числа, то значение z генерируют по правилу $z = \frac{\theta_m}{\theta_n}$, где θ_m, θ_n имеют χ^2 -распределение с m и n степенями свободы соответственно.

Если m и n – произвольные положительные числа, то переходят от переменной z к переменной $y = \frac{z}{1+z}$, для которой

$$z = \frac{y}{1-y}; \quad 1+z = \frac{1}{1-y}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{(1-y)^2}$$

Поэтому плотность вероятностей преобразования случайной величины z имеет вид

$$p(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{m}{2}-1} (1-y)^{\frac{n}{2}-1},$$

то есть y имеет В-распределение с параметрами $\mu = m/2$ и $\nu = n/2$. Если мы сгенерируем значение y случайной величины с $V\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ -распределением, то преобразование $z = \frac{y}{1-y}$ даст нам значение требуемой случайной величины.

II. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

2.1. Общие методы генерирования

Рассмотрим два общих метода генерирования n – мерного случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) с известной плотностью вероятностей $p(x_1, \dots, x_n)$.

Метод условных плотностей вероятностей.

Запишем совместную плотность вероятностей случайного вектора в следующем виде

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) p(x_2 | x_1) p(x_3 | x_1, x_2) \dots p(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Входящие в это равенство условные плотности вероятностей найдем по формулам

$$p(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n,$$

$$p(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n, \quad p(x_2 | x_1) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_1)};$$

$$p(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \dots, x_n) dx_4 \dots dx_n,$$

$$p(x_3 | x_2, x_1) = \frac{p(x_1, x_2, x_3)}{p(x_1, x_2)} \text{ и так далее.}$$

Значения компонент случайного вектора генерируются последовательно как реализации случайных величин с известными одномерными распределениями. Сначала генерируется значение x_1 случайной величины ξ_1 с плотностью вероятностей $p(x_1)$, затем при известном x_1 генерируется значение x_2 случайной величины ξ_2 с одномерной плотностью вероятностей $p(x_2|x_1)$ и так далее. Последним генерируется при известных значениях x_1, x_2, \dots, x_{n-1} значение x_n случайной величины ξ_n с одномерной плотностью вероятностей $p(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$.

Метод исключения.

Пусть переменные x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют неравенствам $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = \overline{1, n}$, а функция $p(x_1, \dots, x_n)$ ограничена, т.е. $0 \leq p(x_1, \dots, x_n) \leq M < \infty$.

Тогда для генерирования случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) , имеющего совместную плотность вероятностей $p(x_1, \dots, x_n)$, методом исключения необходимо:

а) сгенерировать $n+1$ реализаций $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ равномерной в интервале $(0, 1)$ случайной величины и найти значения

$$x_i = a_i + (b_i - a_i) \alpha_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad y = M \alpha_{n+1};$$

б) если $y \leq p(x_1, \dots, x_n)$, то $\xi_i = x_i$, $i = \overline{1, n}$, в противном случае пункт а) повторяется до тех пор, пока не выполнится неравенство пункта б).

2.2. Генерирование нормальных случайных векторов

Пусть необходимо генерировать нормальный случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ с известными вектором средних $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и ковариационной матрицей $R = \|R_{ij}\|$, $R_{ij} = M\{(\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j)\}$. Вектор $\vec{\xi}$ предлагается при этом рассматривать как линейное преобразование вектора $\vec{\eta}$ с независимыми стандартными нормальными компонентами

$$\vec{\xi} = A \vec{\eta} + \vec{a}.$$

Так как генерировать n независимых реализаций стандартной нормальной случайной величины никакого труда для нас не составляет (п. 1.6), то остается лишь указать, как по матрице R найти матрицу A линейного преобразования. Очевидно, что $R = M\{A \vec{\eta} \vec{\eta}^T A^T\} = A A^T$.

Однако уравнение $AA^T = R$ определяет матрицу A неоднозначно. Рассмотрим два варианта нахождения матрицы A .

1. Диагонализация матрицы R .

Матрицу R представляют в виде $R = U\Lambda U^T$, где матрица $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, λ_i – собственные числа матрицы R , а матрица U составлена из нормированных собственных векторов-столбцов матрицы R , соответствующих собственным числам $\lambda_i, i = \overline{1, n}$.

Заметим, что все $\lambda_i > 0$ в силу положительной определенности матрицы R . Рассмотрим диагональную матрицу

$$L = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

Так как $\Lambda = L L^T$, то матрицу A нужно искать в виде

$$A = U L.$$

2. Нахождение матрицы A в треугольном виде.

В предположении, что матрица A имеет треугольный вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A_{11}\eta_1 + a_1, \\ \xi_2 &= A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + a_2, \\ &\dots \\ \xi_n &= A_{n1}\eta_1 + A_{n2}\eta_2 + \dots + A_{nn}\eta_n + a_n.\end{aligned}$$

На основе этих соотношений последовательно получим

$$\begin{aligned}R_{11} &= M\{(\xi_1 - a_1)^2\} = A_{11}^2 M\{\eta_1^2\} = A_{11}, \\ R_{21} &= M\{(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_2)\} = M\{A_{11}\eta_1(A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2)\} = \\ &= A_{11}A_{21}, \dots, \\ R_{nn} &= M\{(\xi_n - a_n)^2\} = M\{(A_{n1}\eta_1 + \dots + A_{nn}\eta_n)^2\} = A_{n1}^2 + \dots + A_{nn}^2.\end{aligned}$$

Окончательно формулы для определения A_{ij} получатся в следующем виде:

$$A_{ij} = \frac{R_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik} A_{jk}}{\sqrt{R_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk}^2}}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n,$$

причем считается, что $\sum_{k=1}^0 A_{ik} A_{jk} \equiv 0$.

Задание для самостоятельной работы

1) Написать подпрограмму генерирования одной реализации нормального случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) с известными средними значениями компонент и матрицей ковариаций.

2) Сгенерировать выборку объема $N=1000$ реализаций нормального случайного вектора. Вектор средних и матрицу ковариаций задать самостоятельно.

3) По χ^2 -критерию проверить нормальность всех компонент полученного вектора при уровне значимости $\alpha=0.05$. Сравнить выборочные средние и матрицу ковариаций с теоретическими.

2.3. Генерирование случайных векторов с заданными одномерными распределениями и матрицей корреляции компонент

Пусть необходимо генерировать n -мерный случайный вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) , у которого одномерные плотности вероятностей компонент ξ_i имеют заданный вид $p_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, а также известны величины $r_{ij} = M\{\xi_i \xi_j\}$, $i, j = \overline{1, n}$. Эта задача решается с помощью нелинейного преобразования компонент n -мерного нормального случайного вектора (η_1, \dots, η_n) с математическими ожиданиями $M\{\eta_i\} = 0$ и ковариациями $M\{\eta_i \eta_j\} = \rho_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$ (генерирование такого вектора (η_1, \dots, η_n) см. в п. 2.2). Предположим, что компоненты вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) и стандартные нормальные компоненты вектора (η_1, \dots, η_n) связаны соотношениями

$$\xi_i = \varphi_i(\eta_i), i = \overline{1, n}.$$

Пусть нам удалось обратить эти соотношения и найти функции $\psi_i(\xi_i)$, такие, что $\eta_i = \psi_i(\xi_i), i = \overline{1, n}$. Тогда одномерная плотность вероятностей величин ξ_i должна иметь вид

$$p_i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\psi_i^2(z)}{2}\right\} \frac{d\psi_i(z)}{dz}.$$

Но функции $p_i(z)$ нам известны, поэтому последнее равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\psi_i(z)$. Разделяя в нем переменные, получим уравнение

$$\exp\left\{-\frac{\psi_i^2}{2}\right\} d\psi_i = \sqrt{2\pi} p_i(z) dz$$

или после интегрирования

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\psi_i(z)} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \int_{-\infty}^z p_i(u) du.$$

Наличие в последней формуле искомой функции в качестве верхнего предела интеграла Лапласа делает нахождение функции $\psi_i(z)$ по этой формуле весьма проблематичным.

Определим величины ρ_{ij} . Так как $M\{z_i z_j\} = r_{ij}$, то относительно ρ_{ij} мы имеем уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(u) \varphi_j(v) \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{ij}^2)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{ij}^2)}(u^2 - 2\rho_{ij}uv + v^2)\right\} dudv = r_{ij},$$

из которого можно найти ρ_{ij} , по крайней мере, численно.

Пример. Пусть необходимо генерировать вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) с **логарифмически нормальным распределением** компонент с известными математическими ожиданиями $M\{\xi_i\} = m_i$, и парными корреляциями $M\{\xi_i \xi_j\} = K_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Заметим, что плотность логарифмически нормального распределения имеет вид

$$p_i(z) = \frac{1}{z\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln z - a_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\},$$

а стандартная нормальная величина η_i связана с логарифмически нормальной величиной ξ_i соотношениями

$$\frac{\ln \xi_i - a_i}{\sigma_i} = \eta_i, \quad \xi_i = \exp(a_i + \sigma_i \eta_i), \quad i = \overline{1, n}, \text{ так как}$$

$$p_{\eta_i}(y) = p_i(e^{a_i + \sigma_i y}) \left| \frac{d\xi_i}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Найдем величины a_i, σ_i, ρ_{ij} .

Так как $m_i = M\{e^{a_i + \sigma_i \eta_i}\} = e^{a_i + \frac{\sigma_i^2}{2}}$, $\ln m_i = a_i + \frac{\sigma_i^2}{2}$,

$$K_{ii} = M\{e^{2a_i + 2\sigma_i \eta_i}\} = e^{2a_i + 2\sigma_i^2} \text{ и } \ln K_{ii} = 2a_i + 2\sigma_i^2,$$

и при $i \neq j$ $K_{ij} = M\{e^{a_i + \sigma_i \eta_i} e^{a_j + \sigma_j \eta_j}\} = e^{a_i + a_j} e^{\frac{\sigma_i^2 + \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sigma_j^2}{2}}$, получим

$$a_i = \ln \frac{m_i^2}{\sqrt{K_{ii}}}, \quad \sigma_i^2 = \ln \frac{K_{ii}}{m_i^2}, \quad \rho_{ij} = \frac{\ln \frac{K_{ij}}{m_i m_j}}{\sqrt{\ln \frac{K_{ii}}{m_i^2} \ln \frac{K_{jj}}{m_j^2}}}.$$

Таким образом, для генерирования случайного вектора с логарифмически нормальным распределением компонент необходимо сначала по известным значениям $K_{ij}, m_i, i, j = \overline{1, n}$, найти величины a_i, σ_i, ρ_{ij} , затем генерировать случайный вектор (η_1, \dots, η_n) со стандартными нормальными компонентами и ковариациями $M\{\eta_i \eta_j\} = \rho_{ij}$, и, наконец, получить искомым вектор с помощью преобразования $\xi_i = e^{a_i + \sigma_i \eta_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Задание для самостоятельной работы

Написать программу генерирования одной реализации случайного вектора (z_1, z_2, z_3) с логарифмически нормаль-

ным распределением компонент, если математические ожидания компонент $m_1 = 1, m_2 = 0,7, m_3 = 1,5$, а ковариационная матрица имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.4. Генерирование случайных векторов, равномерно распределенных в произвольной n -мерной области и на сфере

Равномерное распределение в n -мерной односвязной области (G) генерируется методом исключения так:

- 1) область (G) заключается в параллелепипед $\{(x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$;
- 2) генерируются $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – реализации случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$;
- 3) вычисляются значения $\xi_i = a_i + (b_i - a_i) \alpha_i, i = \overline{1, n}$;
- 4) проверяется, принадлежит ли полученный вектор области (G) . Если $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in (G)$, то это и есть искомая реализация случайного вектора, равномерно распределенного в (G) . В противном случае, все повторяется, начиная с пункта 2), т.е. с генерирования значений $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Пример 1.

Пусть (G) – эллипсоид $\{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a_i}{b_i} \right)^2 \leq 1\}$

центром в точке (a_1, \dots, a_n) и полуосями $b_i, i = \overline{1, n}$. Для генерирования случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) , равномерно распределенного в данном эллипсоиде, необходимо:

а) получить n реализаций $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$;

б) вычислить значения $\eta_i = 2\alpha_i - 1, i = \overline{1, n}$, равномерно распределенные в интервале $(-1, 1)$;

в) если $\sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq 1$, то величины $\xi_i = a_i + b_i \eta_i, i = \overline{1, n}$, составят искомую реализацию случайного вектора.

В противном случае следует повторять шаги а) – в) до получения этой реализации.

Задание для самостоятельной работы

Получить выборку объема 1000 реализаций случайного вектора (x, y, z) , имеющего равномерное распределение в эллипсоиде

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{(z-2)^2}{16} = 1.$$

Пример 2.

Если (G) – плоский круг, $(G) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, то можно генерировать случайный вектор, равномерно распределенный в (G) , иначе, чем в общем случае. Будем задавать точки круга в полярных координатах (r, φ) , где r и φ независимые случайные величины с плотностями вероятностей $p(r) = 2r, 0 \leq r \leq 1$ и $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Тогда декартовы координаты точки круга (G) $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ – это также случайные величины с совместной плотностью вероятностей

$$p(x, y) = p(r(x, y)) p(\varphi(x, y)) \left| \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} \right| = \frac{1}{\pi}, (x, y) \in (G).$$

Но π – это площадь единичного круга и, следовательно, случайный вектор (x, y) равномерно распределен в единичном круге. Исходя из этого, вектор (x, y) генерируют так:

1) генерируют пару равномерных в интервале $(0,1)$ значений α_1, α_2 ;

2) вычисляют значения компонент вектора (x, y) по формулам $x = \sqrt{\alpha_1} \cos(2\pi \alpha_2), y = \sqrt{\alpha_1} \sin(2\pi \alpha_2)$.

Сложнее обстоит дело с генерированием равномерного распределения на поверхности. Рассмотрим генерирование равномерного распределения на N -мерной сфере утверждение: если η_1, \dots, η_N независимые стандартные нормальные случайные величины, то случайный вектор (ξ_1, \dots, ξ_N) с компонентами $\xi_i = \frac{\eta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \eta_i^2}}$, $i = \overline{1, N}$ имеет равномерное распределение на единичной сфере (S). Это утверждение определяет алгоритм генерирования, согласно которому для получения реализации случайного вектора, равномерно распределенного на N -мерной единичной сфере, необходимо генерировать N независимых реализаций η_1, \dots, η_N стандартной нормальной случайной величины, после чего вычислять значения компонент ξ_i искомого случайного вектора по формулам

$$\xi_i = \frac{\eta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \eta_i^2}}, \quad i = \overline{1, N}.$$

2.5. Генерирование случайных векторов других типов

2.5.1. Полиномиальное распределение

Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет полиномиальное распределение с параметрами N, p_1, \dots, p_n , если совместная плотность вероятностей его компонент имеет вид

$$p(y_1, \dots, y_n) = \frac{N!}{y_1! \dots y_n!} p_1^{y_1} \dots p_n^{y_n}, \text{ где целые } y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$
$$y_1 + \dots + y_n = N, \quad p_1 + \dots + p_n = 1.$$

Алгоритм генерирования реализации вектора $\vec{\xi}$:

а) генерируем значения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ случайной величины, имеющей равномерное распределение в интервале $(0, 1)$;

б) затем для каждого α_i находим вектор $\vec{\eta}^{-(i)}$ с n компонентами

$$\eta_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_0 + p_1 + \dots + p_{j-1} < \alpha_i < p_0 + p_1 + \dots + p_j, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

в) наконец, получаем вектор $\vec{\xi} = \sum_{i=1}^N \vec{\eta}^{-(i)}$.

Задание для самостоятельной работы

Написать программу генерирования одной реализации случайного вектора (y_1, y_2, y_3) , имеющего полиномиальное распределение с параметрами

$$N = y_1 + y_2 + y_3 = 100, \quad p_1 = 0,2, \quad p_2 = 0,3, \quad p_3 = 0,5.$$

2.5.2. Многомерное распределение Стьюдента

Рассмотрим N -мерное распределение Стьюдента с m степенями свободы, вектором средних $\vec{\mu}$ и матрицей ковариаций R . Совместная плотность вероятностей этого распределения

$$p(x_1, \dots, x_N) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(m\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det R}} \left[1 + \frac{(\vec{x} - \vec{\mu})^T R^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})}{m} \right]^{-\frac{m+N}{2}},$$

где вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

Алгоритм генерирования:

а) генерируем реализацию (η_1, \dots, η_N) нормального вектора с нулевыми математическими ожиданиями компонент и матрицей ковариаций R ;

б) генерируем значение случайной величины $\zeta \geq 0$, имеющей χ^2 -распределение с m степенями свободы;

в) вычисляем значения компонент искомого вектора по

$$\text{формулам } x_i = \mu_i + \frac{\eta_i \sqrt{m}}{\sqrt{\zeta}}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Задание для самостоятельной работы

Получить выборку объема 1000 реализаций случайного вектора (y_1, y_2, y_3) , имеющего распределение Стьюдента с

$k = 5$ степенями свободы, вектором математических ожиданий компонент $(3, 0,8, 1)$ и корреляционной матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5.3. Многомерное В-распределение

Многомерное В-распределение с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1} > 0$ имеет плотность вероятностей

$$p(x_1, \dots, x_N) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i)}{\Gamma(\lambda_{N+1})} \prod_{j=1}^N \frac{x_j^{\lambda_j-1} u(x_j)}{\Gamma(\lambda_j)} (1 - \sum_{i=1}^N x_i)^{\lambda_{N+1}-1} u(1 - \sum_{i=1}^N x_i),$$

$$x_k \geq 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad x_1 + \dots + x_N = 1, \quad \text{где } u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Алгоритм генерирования:

а) генерируем независимые случайные величины y_1, \dots, y_{N+1} с одномерными плотностями вероятностей

$$p_i(y_i) = \frac{y_i^{\lambda_i-1}}{\Gamma(\lambda_i)} e^{-y_i} u(y_i), \quad i = \overline{1, N+1};$$

б) вычисляем искомые реализации x_i по формуле

$$x_i = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{N+1} y_j}, \quad i = \overline{1, N}.$$

III. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Дискретные марковские процессы

3.1.1. Дискретные марковские процессы с дискретным временем

Рассмотрим марковскую цепь со множеством состояний $\{1, 2, \dots, n\}$. Эволюция марковской цепи полностью описывается матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|_{n \times n}$. Финальные вероятности $\pi_i, i = \overline{1, n}$ состояний марковской цепи перед началом моделирования следует найти, решив следующую систему алгебраических уравнений

$$(*) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \pi_i p_{ij} = \pi_j, & j = \overline{1, n-1}, \\ \sum_{j=1}^n \pi_j = 1. \end{cases}$$

Имитация эволюции марковской цепи с дискретным временем связана с генерированием значений дискретной случайной величины с заданным рядом распределения (п. 1.3).

Алгоритм генерирования:

а) генерируем номер i_0 исходного состояния цепи по ряду распределения $\{ \pi_i, i = \overline{1, n} \}$;

б) при известном номере i текущего состояния цепи по ряду распределения $\{ p_{ij}, j = \overline{1, n} \}$ генерируем номер j следующего состояния цепи.

Шаг б) повторяется необходимое для моделирования число раз. Результат моделирования – последовательность номеров состояний цепи требуемой длины.

3.1.2. Дискретные марковские процессы с непрерывным временем

Множество состояний марковской цепи с непрерывным временем $\{ 1, \dots, n \}$, но переходы из состояния в состояние происходят в случайные моменты времени $t_i, i = 1, 2, \dots$. Для описания такой цепи задается матрица инфинитезимальных коэффициентов

$$q_{ij}, i, j = \overline{1, n}, q_{ij} \geq 0, i \neq j, q_{ii} < 0, \sum_{j=1}^n q_{ij} = 0.$$

Финальные вероятности $\{ \pi_i, i = \overline{1, n} \}$ состояний цепи определяются системой уравнений

$$(**) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \pi_i q_{ij} = 0, & j = \overline{1, n-1}, \\ \sum_{i=1}^n \pi_i = 1. \end{cases}$$

Алгоритм генерирования:

а) генерируем номер i состояния цепи в начальный момент времени t_0 по финальному распределению $\{\pi_i, i = \overline{1, n}\}$;

б) генерируем значение α , равномерно распределенное в интервале $(0,1)$, и вычисляем значение случайной величины τ интервала времени до перехода цепи в новое состояние по формуле $\tau = \frac{\ln \alpha}{q_{ii}}$ и значение $t_{i+1} = t_i + \tau$ следующего после t_i момента перехода цепи в новое состояние;

в) вычисляем вероятности $p_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}, j \neq i$ перехода цепи из предыдущего состояния i в следующее состояние j ;

г) по ряду распределения $\{p_{ij}, j = \overline{1, n}, j \neq i\}$ генерируем номер j нового состояния процесса.

Шаги б) – г) повторяем в цикле на заданном отрезке времени $[t_0, T]$ или заданное число раз. Результат работы алго-

ритма – последовательность $\{(i_0, t_0), (i_1, t_1), \dots\}$, описывающая эволюцию марковской цепи.

Задание для самостоятельной работы

1) Для дискретной цепи Маркова с дискретным временем, множеством состояний $\{1, \dots, n\}$ и матрицей $P = \|p_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$ переходных вероятностей состояний (все состояния марковской цепи должны быть существенными) написать программу, имитирующую N переходов цепи из состояния в состояние. Результатом работы программы должна быть последовательность номеров состояний цепи i_0, i_1, \dots, i_N . Нарисовать соответствующий граф переходов.

2) Найти выборочные оценки финальных вероятностей состояний марковской цепи с дискретным временем (посчитать количество пребывания цепи в каждом из ее состояний и поделить это количество на N). Сравнить выборочные финальные вероятности с теоретическими $\{\pi_i, i = \overline{1, n}\}$, полученными из системы уравнений (*).

3) Для дискретной цепи Маркова с непрерывным временем, множеством состояний $\{1, \dots, n\}$ и матрицей инфинитезимальных коэффициентов $Q = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$

(в каждой строке матрицы Q должно быть не больше одного нуля) написать программу, имитирующую N переходов цепи из состояния в состояние. Результатом работы программы должна быть последовательность $(i_0, t_0), (i_1, t_1), \dots, (i_N, t_N)$ номеров состояний цепи и моментов перехода цепи в эти состояния.

4) Найти суммарное время пребывания цепи в каждом из состояний. Сосчитать относительное время пребывания в

каждом состоянии и сравнить полученные результаты с финальными вероятностями состояний, найденными из системы уравнений (**).

3.2. Моделирование других случайных процессов

3.2.1. Стандартный винеровский процесс

Рассмотрим монотонную последовательность моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$. Пусть $w(t_i)$ – сечения винеровского процесса при $t = t_i$. У стандартного винеровского процесса приращения $\Delta w(t_i) = w(t_{i+1}) - w(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$ являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $D\{\Delta w(t_i)\} = \Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Обозначим $w(t_0)$ исходное значение винеровского процесса $w(t)$, тогда сечения стандартного винеровского процесса $w(t)$ в моменты времени t_i , $i = 1, 2, \dots$ генерируют по рекуррентному правилу $w(t_{i+1}) = w(t_i) + \eta_i \sqrt{\Delta t_i}$, где случайные величины $\eta_i \sim N(0,1)$, $i = 0, 1, \dots$ и независимы.

3.2.2. Арифметическое броуновское движение

Арифметическое броуновское движение $x(t)$ – это случайный процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением $dx(t) = a dt + \sigma dw(t)$, где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, a, σ – параметры. Приращение процесса $\Delta x(t_i) = x(t_{i+1}) - x(t_i)$ – независимые нормальные случайные величины с математическими ожиданиями $M\{\Delta x(t_i)\} = a \Delta t_i$ и дисперсиями $D\{\Delta x(t_i)\} = \sigma^2 \Delta t_i$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда сечения процесса $x(t)$ в моменты времени t_i генерируют по рекуррентному правилу $x(t_{i+1}) = x(t_i) + a \Delta t_i + \sigma \eta_i \sqrt{\Delta t_i}$, где $\eta_i \sim N(0, 1)$ и независимы, $i = 0, 1, \dots$.

3.2.3. Одномерный гауссовский случайный процесс с экспоненциальной функцией корреляции

Пусть $x(t)$ – гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием $M\{x(t)\} = 0$ и функцией корреляции $R(\tau) = M\{x(t)x(t+\tau)\} = \sigma^2 e^{-q|\tau|}$, $q > 0$. Это марковский диффузионный случайный процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = -q x(t) dt + \sigma dw(t).$$

Подход к моделированию $x(t)$ основан на его марковости. Фиксируем моменты времени t и s , $t > s$. В силу марковости $x(t)$ распределение вероятностей случайной величины $x(t)$ зависит только от значения $x(s)$. Тогда для условных математического ожидания и дисперсии в соответствии с формулами теории вероятностей получим

$$M\{x(t) | x(s)\} = x(s) e^{-q(t-s)},$$

$$D\{x(t) | x(s)\} = \sigma^2 (1 - e^{-2q(t-s)}).$$

Алгоритм моделирования значений процесса $x(t)$ в заданные моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$ выглядит так:

- 1) генерируем значение $\eta \sim N(0,1)$ и берем $x(t_0) = \sigma \eta$;
- 2) значения $x(t_i)$ последовательно находим по формуле

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) e^{-q(t_{i+1}-t_i)} + \sigma \eta_i \sqrt{1 - e^{-2q(t_{i+1}-t_i)}},$$

где случайные величины $\eta_i \sim N(0,1)$ и независимы, $i = 0, 1, \dots$.

Задание для самостоятельной работы

Выполнить моделирование гауссовского случайного процесса $x(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $M\{x(t)x(s)\} = 9e^{-2|t-s|}$:

а) для равноотстоящих моментов времени $t_i = i, i = 0, 1, \dots, 100$;

б) для моментов $\{t_i\}$, образующих пуассоновский поток интенсивности $\lambda = 2$.

3.2.4. Многомерный гауссовский случайный процесс с экспоненциальной функцией корреляции

Пусть теперь $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – векторный гауссовский случайный процесс с нулевыми математическими ожиданиями компонент и функцией корреляции

$$M\left\{\vec{x}(t)\vec{x}^T(s)\right\} = B e^{-q|t-s|}, \quad \text{где } B = \|B_{ij}\|_{n \times n} \text{ – положительно}$$

определенная матрица. В этом случае процесс $x(t)$ снова марковский, причем верны формулы, использованные выше для одномерного гауссовского процесса: $\forall t > s$

$$M\left\{\vec{x}(t) \mid \vec{x}(s)\right\} = e^{-q(t-s)} \vec{x}(s),$$

$$M\left\{\vec{x}(t)\vec{x}^T(t) \mid \vec{x}(s)\right\} = (1 - e^{-2q(t-s)}) B.$$

Представим матрицу B в виде $B = A A^T$ (как в п. 2.2) и пусть

вектор-столбец $\vec{\eta}$ составлен из независимых значений

$$\eta_i \sim N(0, 1), \quad i = \overline{1, n}.$$

Алгоритм моделирования сечений $\vec{x}(t)$ в моменты $t_0 < t_1 < \dots$:

1) генерируем вектор $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ с независимыми стандартными нормальными компонентами и берем $\vec{x}(t_0) = A\vec{\eta}$;

2) значения $\vec{x}(t_i)$ последовательно находим по формуле

$$\vec{x}(t_{i+1}) = e^{-q(t_{i+1}-t_i)} \vec{x}(t_i) + A\vec{\eta}_i \sqrt{1 - e^{-2q(t_{i+1}-t_i)}}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

где векторы $\vec{\eta}_i = (\eta_1^{(i)}, \dots, \eta_n^{(i)})$ с независимыми стандартными нормальными компонентами генерируются на каждом шаге.

Задание для самостоятельной работы

Выполнить моделирование гауссовского случайного процесса $x(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $M\{x(t)x(s)\} = 9e^{-2|t-s|}$

а) для равноотстоящих моментов времени $t_i = i$, $i = 0, 1, \dots, 100$;

б) для моментов $\{t_i\}$, образующих пуассоновский поток интенсивности $\lambda = 2$.

3.2.5. Гауссовский случайный процесс

с дробно-рациональным спектром

Рассмотрим моделирование одномерного гауссовского случайного процесса с функцией корреляции

$$R(\tau) = (A(|\tau|) \cos w\tau + B(|\tau|) \sin w\tau),$$

где $A(\tau), B(\tau)$ полиномы, содержащие лишь четные степени τ . Спектр мощности таких процессов имеет вид

$$S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{iw\tau} d\tau = \frac{R_0 + R_1 w^2 + \dots + R_k w^{2k}}{L_0 + L_1 w^2 + \dots + L_l w^{2l}}, \quad l > k.$$

Идея алгоритма моделирования основана на представлении спектра $S(w)$ в форме

$$S(w) = \left[\frac{\rho_0 + \rho_1(iw) + \dots + \rho_k(iw)^k}{\lambda_0 + \lambda_1(iw) + \dots + \lambda_l(iw)^l} \right]^2,$$

где полиномы правой части последней формулы имеют лишь корни с отрицательной действительной частью. При этом рассматриваемый процесс $x(t)$ можно представить в виде $x(t) = \rho_0 \xi(t) + \rho_1 \xi'(t) + \rho_k \xi^{(k)}(t)$, где $\xi(t)$ – случайный процесс, имеющий производные до k -го порядка включительно.

Многомерный случайный процесс $\vec{\xi}(t) = (\xi(t), \xi'(t), \dots, \xi^{(k)}(t))$ является стационарным марковским процессом с нулевыми средними компонент. Функция корреляции процесса $\xi(t)$

$$B_{00}(t-s) = M\{\xi(t)\xi(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(t-s)}}{L_0 + L_1 w^2 + \dots + L_l w^{2l}} dw,$$

причем последний интеграл можно найти методами теории вычетов. Элементы ковариационной матрицы векторного процесса $\xi(t)$ имеют вид

$$M\{\xi^{(m)}(t)\xi^{(n)}(t)\} = B_{mn}(t-s) = \frac{\partial^{m+n} B_{00}(t-s)}{\partial t^m \partial s^n} =$$

$= (-1)^n B_{00}^{(m+n)}(t-s)$, где $m, n = \overline{0, k}$. Обозначим эту ковариационную матрицу $B(t-s) = \|B_{mn}(t-s)\|$. Фиксируем моменты времени $t > s$ и пусть известен вектор $\vec{\xi}(s)$. Тогда аналогично записи условного математического ожидания и дисперсии в п. 3.3.4, получим

$$M\{\vec{\xi}(t) \mid \vec{\xi}(s)\} = B(t-s)B^{-1}(0)\vec{\xi}(s),$$

$$M\{\vec{\xi}(t)\vec{\xi}^T(t) \mid \vec{\xi}(s)\} = B(0) - B(t-s)B^{-1}(0)B(t-s).$$

Представим последнюю матрицу условных дисперсий в виде $B(0) - B(t-s)B^{-1}(0)B(t-s) = A(t-s)A^T(t-s)$, где матрицу $A(t-s)$ можно найти так же, как в п. 2.2. Аналогично выполним ортогональное разложение для матрицы $B(0) = CC^T$.

Алгоритм генерирования сечений процесса $x(t)$

Для получения сечений процесса в моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$:

1) генерируем реализацию $(k+1)$ -мерного стандартного нормального вектора $\vec{\eta}_0 = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)$, получаем вектор $\vec{\xi}(t_0) = C\vec{\eta}_0$ и находим значение

$$x(t_0) = \rho_0 \xi(t_0) + \rho_1 \xi'(t_0) + \dots + \rho_k \xi^{(k)}(t_0),$$

где $\xi(t_0), \xi'(t_0), \dots, \xi^{(k)}(t_0)$ – это компоненты вектора $\vec{\xi}(t_0)$;

2) для получения каждого следующего сечения процесса $x(t)$ генерируем новую реализацию стандартного нормального случайного вектора $\vec{\eta}_{i+1} = (\eta_0^{(i+1)}, \dots, \eta_k^{(i+1)})$ и находим сначала

$$\vec{\xi}(t_{i+1}) = B(t_{i+1} - t_i)B^{-1}(0)\vec{\xi}(t_i) + A(t_{i+1} - t_i)\vec{\eta}_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

а затем $x(t_{i+1}) = \rho_0 \xi(t_{i+1}) + \rho_1 \xi'(t_{i+1}) + \dots + \rho_k \xi^{(k)}(t_{i+1})$, где $\xi(t_{i+1}), \xi'(t_{i+1}), \dots, \xi^{(k)}(t_{i+1})$ – это компоненты вектора $\vec{\xi}(t_{i+1})$.

3.2.6. Модель ARMA (авторегрессии – скользящего среднего) случайного процесса с дробно-рациональным спектром

Алгоритм генерирования сечений процесса $x(t)$ упрощается, если $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \Delta = const$, $t_0 = 0$. В этом случае необходимо генерировать последовательность значений $x_k = x(k\Delta)$, $k = 1, 2, \dots$

Пусть $M\{x(t)\} = 0$, $M\{x(t)x(t+\tau)\} = R(\tau)$. Тогда для генерирования последовательности x_k нам потребуются лишь

значения $R_k = R(k\Delta)$. Рассмотрим спектральную плотность процесса $x(t)$ $f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{ik\lambda}$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ и функции $S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k z^k$, $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k z^k$. Показано, что у широкого класса процессов с $R_k = \sum_{r,s=1}^N A_{rs} k^r e^{k\lambda_s}$, $k = 0, 1, \dots$ $S(z)$ – дробно-рациональная функция, т.е. спектр таких процессов $f(\lambda) = S(e^{i\lambda})$ дробно-рациональный.

Для моделирования последовательности значений x_k процессов этого класса используют модель авторегрессии – скользящего среднего ARMA(p, q)

$$x_m + a_1 x_{m-1} + \dots + a_p x_{m-p} = b_0 \eta_m + b_1 \eta_{m-1} + \dots + b_q \eta_{m-q},$$

где $q < p$, $m \leq p$, $\eta_{m-q}, \dots, \eta_m$ – независимые случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями (не обязательно нормальные). Обозначим

$$A(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_p z^p, \quad B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_q z^q.$$

Из теории случайных процессов с дробно-рациональным спектром известно, что $S(z) = \frac{B(z)B\left(\frac{1}{z}\right)}{A(z)A\left(\frac{1}{z}\right)}$. Поэтому, найдя $S(z)$ и выде-

лив по специальной методике функции $A(z)$ и $B(z)$, мы определим коэффициенты a_1, \dots, a_p и b_0, \dots, b_q модели авторегрессии – скользящего среднего ARMA(p, q) процесса $x(t)$.

3.2.7. Случайный процесс с экспоненциальным одномерным распределением сечений

Пусть одномерные плотности вероятностей сечений процесса $x(t)$ экспоненциальные с плотностью вероятностей $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ и известна корреляционная функция $R_x(\tau)$ процесса $x(t)$. Идея моделирования такого случайного процесса состоит в представлении его в виде $x(t) = \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – независимые гауссовские случайные процессы с нулевыми средними. Ниже мы найдем и функции корреляции этих процессов. При фиксированном значении t $\xi_1(t), \xi_2(t)$ – нормальные случайные величины, и сумма их квадратов имеет χ^2 – распределение с двумя степенями свободы, т.е. экспоненциальное распределение. Теперь $\forall t \quad M\{x(t)\} = D\xi_1(t) + D\xi_2(t) = \frac{1}{\lambda}$. Допустим, что $D\xi_1(t) = D\xi_2(t) = \frac{1}{2\lambda}$. Обозначим $R_1(\tau), R_2(\tau)$ корреляционные функции процессов $\xi_1(t), \xi_2(t)$, тогда

$$R_1(0) = R_2(0) = \frac{1}{2\lambda}.$$

Найдем далее величину

$$M\{x(t)x(s)\} = M\{\xi_1^2(t)\xi_1^2(s)\} + M\{\xi_1^2(t)\xi_2^2(s)\} + \\ + M\{\xi_2^2(t)\xi_1^2(s)\} + M\{\xi_2^2(t)\xi_2^2(s)\}.$$

Из независимости процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ следует, что

$$M\{\xi_1^2(t)\xi_2^2(s)\} = M\{\xi_2^2(t)\xi_1^2(s)\} = D\xi_1(t)D\xi_2(t) = \frac{1}{4\lambda^2}.$$

В силу известного свойства гауссовских процессов

$$M\{\xi_1^2(t)\xi_1^2(s)\} = M\{\xi_1^2(t)\}M\{\xi_1^2(s)\} + 2M^2\{\xi_1(t)\xi_1(s)\}$$

$$\text{получим } M\{x(t)x(s)\} = \frac{1}{\lambda^2} + 2R_1^2(t-s) + 2R_2^2(t-s).$$

$$\text{Теперь } R_x(\tau) = M\{x(t)x(t+\tau)\} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} + 2R_1^2(\tau) + 2R_2^2(\tau) \text{ и,}$$

$$\text{если взять } R_1(\tau) = R_2(\tau), \text{ то получится } R_x(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{R_x(\tau)}.$$

Алгоритм генерирования сечений процесса $x(t)$ на заданной последовательности моментов времени $t_0 < \dots < t_n < \dots$:

1) генерируем, как в п. 3.3.3, независимые значения гауссовских случайных процессов $\xi_1(t_0)$ и $\xi_2(t_0)$ и вычисляем значение $x(t_0) = \xi_1^2(t_0) + \xi_2^2(t_0)$;

2) на i -ом шаге алгоритма генерируем, как в 3.3.3, значения гауссовских случайных процессов $\xi_1(t_i), \xi_2(t_i)$ и находим значение

$$x(t_i) = \xi_1^2(t_i) + \xi_2^2(t_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

3.3. Моделирование потоков событий

Моделирование потока событий – это генерирование случайных моментов появления событий в этом потоке на некотором заданном временном интервале $[t_0, t_0 + T]$, обычно $t_0 = 0$. Обозначим $t_i, i = 0, 1, \dots$ моменты наступления событий в потоке и $\tau_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots$ случайные интервалы времени между последовательными моментами наступления событий.

3.3.1. Пуассоновский поток событий

В пуассоновском потоке событий интервалы $\tau_i, i = 1, 2, \dots$ независимы и экспоненциально распределены с плотностью вероятностей $p(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \tau \geq 0, \lambda > 0$, λ – интенсивность наступления событий в потоке. Выше (пример 1, п. 1.5) уже

говорилось, что экспоненциально распределенные случайные величины τ_i генерируются по правилу $\tau_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha_i$, где значения α_i независимы и равномерно распределены в интервале $(0,1)$, $i=1,2,\dots$. Тогда моменты t_i последовательно генерируются по формуле $t_i = t_{i-1} - \frac{1}{\lambda} \ln \alpha_i$, $i=1,2,\dots$ до тех пор пока не выполнится условие $t_i \geq t_0 + T$.

3.3.2. Рекуррентный поток событий

В рекуррентном потоке событий все τ_i , $i=2,3,\dots$ - независимые случайные величины, одинаково распределенные с плотностью вероятностей $p(\tau)$, а величина τ_1 интервала времени от начала наблюдения до момента наступления первого события имеет плотность вероятностей

$$p(\tau_1) = \left(1 - \int_0^{\tau_1} p(\tau) d\tau \right) \Big/ \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau.$$

Способы генерирования независимых реализаций случайной величины с известной плотностью вероятностей рассмотрены в пп. 1.5–1.8. Остановимся лишь на том, как избежать генерирования значения величины τ_1 , имеющей другую плот-

ность вероятностей, чем все остальные τ_i . Для этого в качестве начального момента времени берут $t_0^* = t_0 - 1000\bar{\tau}$ и начинают генерировать моменты t_i наступления событий в потоке. Пока $t_i < t_0$, их отбрасывают. С момента появления $t_i > t_0$ их начинают регистрировать как моменты наступления событий в потоке. В частности, **поток Эрланга** с плотностью вероятностей

$$p(\tau) = \frac{\tau^{n-1} (n\lambda)^n}{(n-1)!} e^{-n\lambda\tau}, \tau \geq 0, \lambda > 0, M\tau = 1/\lambda$$

генерируется по правилу $t_i = t_{i-1} - \frac{1}{n\lambda} \sum_{k=1}^n \ln \alpha_k$, где α_k – независимые значения случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(0,1)$.

Задание для самостоятельной работы

Получить выборку объема 1000 моментов последовательного наступления событий в потоке Эрланга с параметрами $n = 3, \lambda = 5$.

3.3.3. Дважды стохастический поток событий

Дважды стохастическим потоком событий будем называть такой поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ – случайный про-

процесс. Общий алгоритм моделирования таких потоков построить сложно. Рассмотрим лишь алгоритм моделирования дважды стохастического пуассоновского потока, интенсивность которого $\lambda(t)$ – дискретный марковский случайный процесс с непрерывным временем, конечным множеством состояний $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и известной матрицей инфинитезимальных коэффициентов $Q = \|q_{ij}\|_{k \times k}$. До начала генерирования моментов t_i необходимо вычислить финальные вероятности $\pi_i, i = \overline{1, k}$ и переходные вероятности $p_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}, i \neq j$ состояний случайного процесса $\lambda(t)$ как при моделировании марковской цепи с непрерывным временем в п.3.1.

Алгоритм моделирования:

1) по финальному распределению $\{\pi_i, i = \overline{1, k}\}$ генерируем начальное состояние процесса $\lambda(t_0)$;

2) по формуле $T_i = \frac{\ln \alpha}{q_{ii}}$, где α – реализация случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$, генерируется значение T_i случайного времени, в течение которого процесс $\lambda(t)$ останется в состоянии λ_i , и вычисляется

момент t_i перехода процесса $\lambda(t)$ в следующее состояние:

$$t_i = t_{i-1} + T_i, \quad i = 1, 2, \dots;$$

3) на временном интервале (t_{i-1}, t_i) длины T_i по формуле

$$t_j = t_{i-1} + \tau_j, \quad \tau_j = -\frac{\ln \alpha_j}{\lambda_i},$$

где α_j – независимые реализации равномерного в интервале $(0, 1)$ распределения, пока $t_j < t_i$, генерируются моменты t_j наступления событий в потоке;

4) по ряду распределения $\{p_{im}, m = \overline{1, k}, m \neq i\}$ генерируется следующее состояние λ_m процесса $\lambda(t)$ и т.д.

Шаги 2) – 4) повторяются в цикле, пока $t_j \leq T$, где T – общее время моделирования.

Задание для самостоятельной работы

1) Задать время моделирования T и выполнить на временном отрезке $[0, T]$ моделирование дважды стохастического пуассоновского потока событий, интенсивность которого $\lambda(t)$ – марковский процесс с конечным числом состояний $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и матрицей инфинитезимальных коэффициентов $Q = \|q_{ij}\|_{k \times k}$.

2) Сформировать последовательность $\{(t_i, \lambda_i), i = 1, \dots, n\}$ моментов наступления событий в потоке и значений интенсивности потока $\lambda(t)$, $t_i \in (0, T)$, $\lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Работу любой системы массового обслуживания (СМО) можно представить как процесс ее перехода из одного состояния в другое в последовательные моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots$, когда в СМО происходят события, изменяющие состояние системы. Для определения совокупности событий, которые могут происходить в СМО, необходимо определить типы заявок, потоки поступления заявок в систему, потоки различных внешних воздействий, законы обслуживания заявок и дисциплину обслуживания. На основе этих данных и целей анализа СМО строится вектор состояний системы. В качестве компонент этого вектора выбираются переменные, которые в каждый момент времени работы системы однозначно определяют ее состояние. Например, часто элементом вектора состояний СМО является число заявок $n(t_i)$, находящихся в системе в момент времени t_i . Кроме этого создается вектор моментов наступления разных по типу событий, и в каждый момент времени в качестве номера m типа очередного события выбирается номер наименьшей по величине компоненты этого вектора. Наступление события

m -го типа в СМО требует изменения вектора состояния системы и генерирования следующего момента наступления события m -го типа, который становится новым значением m -ой компоненты вектора моментов наступления событий.

Начинается моделирование с ввода исходных данных: параметров СМО, целого числа, запускающего датчик случайных чисел, времени моделирования, исходных значений компонент вектора состояний системы. Далее выполняется основной цикл моделирования до тех пор, пока не закончится время моделирования. После этого делается необходимая обработка результатов моделирования.

4.1. Моделирование СМО $GI | G | k | \infty$

Рассмотрим одну из моделей СМО $GI | G | k | \infty$. Событиями, изменяющими состояние СМО, будем считать приход в систему новой заявки. Интервалы между поступлениями соседних заявок $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $A(\tau)$. Каждая поступившая заявка обслуживается одним из k приборов. Длительности обслуживания всех заявок любым прибором независимы и одинаково распределены

с функцией распределения $B(z)$. Обозначим l_n – количество незанятых приборов в момент t_n поступления n -ой заявки. Если $l_n > 0$, поступившая заявка немедленно занимает первый по порядку свободный прибор. Если $l_n = 0$, поступившая заявка становится в очередь неограниченной длины. Пусть заявки берутся из очереди на обслуживание в соответствии с дисциплиной *FIFO*.

Обозначим u_n – время ожидания n -ой заявкой начала обслуживания, $w_{n,i}$ – интервал времени между началом и окончанием обслуживания i -ым прибором заявок, поступивших до момента t_n и находящихся на обслуживании. Тогда $u_n = \min(w_{n,1}, \dots, w_{n,k})$, $t_n + u_n$ – момент начала, а $t_n + u_n + z_n$ – момент окончания обслуживания n -ой заявки. Вектор $\vec{w}_n = (w_{n,1}, \dots, w_{n,k})$, $n = 1, 2, \dots$ представляет ситуацию с обслуживанием в момент времени t_n на всех k приборах, причем $\vec{w}_1 = (0, \dots, 0)$.

На n -ом шаге алгоритма в момент t_n генерируются τ_{n+1} – интервал времени до прихода следующей заявки, z_n – время обслуживания поступившей n -ой заявки. Номером i_n при-

бора, который будет обслуживать n -ую заявку становится номер наименьшей компоненты вектора \overrightarrow{w}_n , $w_{n,i_n} = \min(w_{n,1}, \dots, w_{n,k})$, причем, если среди компонент вектора \overrightarrow{w}_n есть нули, i_n – номер первого слева направо нуля.

После этого выполняются следующие действия:

$u_n = w_{n,i_n}$, $w_{n,i_n} = w_{n,i_n} + z_n$, $w_{n+1,j} = w_{n,j} - \tau_{n+1}$, $j = \overline{1, k}$. При этом, если получается $w_{n+1,j} < 0$, берут $w_{n+1,j} = 0$.

Шаги алгоритма повторяются в цикле в течение заданного времени моделирования T , т.е. пока $t_n < T$. В процессе работы алгоритма можно считать число заявок, покинувших систему после завершения обслуживания, текущую длину очереди, текущее число занятых приборов.

Данная модель позволяет оценить все средние характеристики системы. Например, несмещенная оценка среднего времени ожидания заявкой обслуживания имеет вид $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i$, где N – число поступивших в СМО заявок с начала моделирования. Можно также найти оценки среднего числа занятых приборов, средней длины очереди, исследовать поток моментов окончания обслуживания.

4.2. Моделирование систем телетрафика

Примером СМО со сложной структурой, для которых имитационное моделирование является единственным методом исследования, служат системы телетрафика. Заявки в таких системах – вызовы, требующие занятия одной из линий связи на некоторое случайное время (время разговора или передачи данных). Очевидно, что полное перечисление всех состояний системы и тем более, запись матрицы переходных вероятностей состояний невозможны. При наиболее простой полнодоступной схеме коммутации каждому вызову предоставляется линия связи. При более распространенной неполнодоступной схеме коммутации возможны отказы в соединении.

Допустим, что потоки вызовов в такой системе пуассоновские, а длительность обслуживания (разговора или сеанса передачи данных) имеет экспоненциальное распределение. Пусть λ_{ij} – интенсивность потока вызовов, поступающих на i -ый вход и запрашивающих j -го абонента. Тогда суммарная интенсивность работы системы $\lambda = \sum_{i \in N} \sum_{j \in W} \lambda_{ij}$, где N – множество входов, W – множество абонентов. Обозначим

$\frac{1}{\mu}$ – среднее время обслуживания всех вызовов. В этих усло-

виях работу системы телетрафика можно описать марковским процессом с конечным числом состояний. Элементами пространства состояний этого процесса x_t будут подмноже-

ства линий связи, занятых в момент времени t . Обозначим

$|x_t|$ – количество занятых линий связи в момент времени t и

пусть t_k – моменты перехода процесса из состояния x_{t_k} в со-

стояние $x_{t_{k+1}}$, $k = 0, 1, \dots$. Этот переход моделируется следую-

щим образом: в момент t_k с вероятностью $\frac{\lambda}{\lambda + \mu \cdot |x_{t_k}|}$ посту-

пает вызов и с вероятностью $\frac{\lambda_{ij}}{\lambda}$ требует линию, соединяю-

щую i -ый вход с j -ым абонентом. В соответствии с заданной дисциплиной поиска вызову либо предоставляется сво-

бодная линия, и тогда $|x_{t_{k+1}}| = |x_{t_k}| + 1$, либо вызов получает

отказ, и тогда $x_{t_{k+1}} = x_{t_k}$. С вероятностью $\frac{\mu \cdot |x_{t_k}|}{\lambda + \mu \cdot |x_{t_k}|}$ одна из

линий освобождается (эта линия равновероятно выбирается из занятых линий) и исключается из текущего состояния:

$$|x_{t_{k+1}}| = \begin{cases} |x_{t_k}| - 1, & |x_{t_k}| > 1, \\ 0, & |x_{t_k}| \leq 1. \end{cases}$$

В каждом из состояний x_{t_k} , $k = 1, 2, \dots$ процесс остается случайное время, распределенное экспоненциально с параметром $\lambda + \mu \cdot |x_{t_k}|$. С помощью такой модели можно оценить такие характеристики коммутационной системы телетрафика как вероятность отказа в соединении, среднее число потерянных вызовов и др.

4.3. Моделирование работы автотранспортного предприятия

Рассмотрим задачу моделирования работы пассажирского автотранспортного предприятия, имеющего на балансе n автобусов, которые каждый день выезжают на маршруты и перевозят пассажиров, принося доход предприятию. Для ремонта поломавшихся автобусов на предприятии имеется l ремонтных линий. Поломавшийся автобус возвращается на базу и ставится на ремонт, если есть свободные ремонтные линии. Если все ремонтные линии заняты, автобус ждет ремонта в общей очереди.

Обозначим $t_i, i = 1, 2, \dots$ моменты времени наступления событий, меняющих число работающих автобусов (поломка автобуса, возвращение автобуса из ремонта), $k(t_i)$ – число работающих автобусов сразу после момента t_i , при этом $n - k(t_i)$ – число сломанных автобусов сразу после t_i , P_i – прибыль предприятия на промежутке времени $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots$. Будем считать потоки моментов поломок и моментов окончаний ремонта пуассоновскими с известными параметрами λ и μ соответственно. Если $n - k(t_i) \leq l$, то все сломавшиеся автобусы находятся в ремонте. Если $n - k(t_i) > l$, то $n - k(t_i) - l$ автобусов ждут ремонта в очереди сразу после момента t_i . Пусть следующая поломка после момента t_i наступит через время τ_1 , интенсивность потока автомобилей, выходящих из ремонта после момента t_i , равна $\mu \min(n - k(t_i), l)$, после момента t_i очередной автобус выйдет из ремонта спустя время τ_2 . Вектор состояний системы $(t_i, k(t_i), P_i)$, $i = 0, 1, \dots$. На i -м шаге алгоритма:

$$1) \tau_1 = -\frac{\ln \alpha_1}{\lambda k(t_i)}, \tau_2 = -\frac{\ln \alpha_2}{\mu \min(n - k(t_i), l)},$$

$t_{i+1} = t_i + \min\{\tau_1, \tau_2\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, где α_1 и α_2 равномерно распределенные в $(0, 1)$ числа, генерируемые базовым датчиком;

2) если $\tau_1 < \tau_2$, то $k(t_{i+1}) = k(t_i) - 1$, если $\tau_1 > \tau_2$, то $k(t_{i+1}) = k(t_i) + 1$;

3) на каждом промежутке времени $[t_i, t_{i+1}]$ прибыль предприятия P_i будем определять по формуле

$$P_i = [c_1 k(t_i) - c_2 (n - k(t_i)) - c_3 l](t_{i+1} - t_i),$$

где c_1 – доход в единицу времени от одного работающего автобуса, c_2 – потери в единицу времени от простоя одного автобуса, c_3 – расходы на содержание одной ремонтной линии в единицу времени.

Блок-схема алгоритма моделирования приведена на рис. 8.

Задание для самостоятельной работы

1. Выполнить моделирование работы автотранспортного предприятия при заданных значениях времени моделирования T , параметров λ и μ , c_1, c_2, c_3

2. Найти суммарное время простоя автобусов и опеределить, какую часть от времени моделирования составляет время простоя автобусов.

3. Найти оптимальное число автобусов n при фиксированном значении числа ремонтных линий l по критерию

$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n P_i \Rightarrow \max_n$ и оптимальное значение l при фиксированном значении n по критерию

$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n P_i \Rightarrow \max_l$.

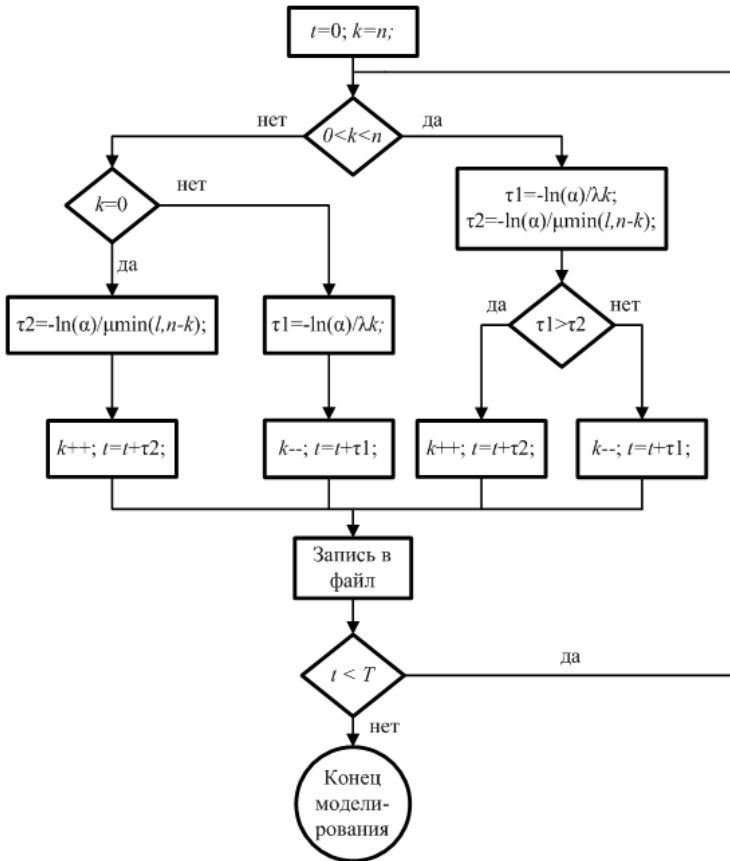


Рис. 8

4.4. Моделирование работы склада

Рассмотрим задачу моделирования работы склада, где хранится товар одного вида, например, сахар. При моделировании необходимо знать количество товара на складе в те-

кущий момент времени. В случайные моменты времени независимо друг от друга на склад приходят покупатели. Поток покупателей можно моделировать как пуассоновский с параметром λ . Пусть количество товара, приобретаемое каждым покупателем, – дискретная случайная величина с известным рядом распределения и независимыми реализациями. Это распределение можно оценить на основе складской отчетности. С течением времени количество товара на складе уменьшается до некоторого критического уровня и делается заказ на поставку какого-то количества товара, который выполняется за случайное время, причем наложение заказов исключено. Распределение времени доставки заказов также можно определить после анализа складской отчетности. Возможны обычные, срочные или сверхсрочные заказы. Не исключается возможность того, что пока доставляется новая партия товара, некоторые покупатели уйдут ни с чем.

Основными событиями в системе являются: приход нового покупателя, совершение покупки, заказ товара, доставка товара. В моменты t_i , когда происходит одно из этих событий, могут изменяться компоненты вектора состояний системы: x – текущее количество товара на складе, k – общее число посетителей, купивших товар, m – общее число посетите-

лей, не купивших товар, r_1 – общее число обычных заказов, r_2 – общее число срочных заказов. Обозначим t – текущее время, τ – случайный интервал между последовательными моментами времени прихода покупателей, z – случайная величина покупки, сделанной одним покупателем, u – случайное время доставки обычного заказа, v – случайное время доставки срочного заказа, S_1, N_1 – уровень и величина обычного заказа (когда впервые количество товара на складе $x \leq S_1$, делается заказ величины N_1), S_2, N_2 – уровень и величина срочного заказа, T – время моделирования.

Как правило, целью оптимизации работы склада является увеличение прибыли. Доходы склада связаны с реализацией товара, поэтому можно считать доход приближенно прямо пропорциональным количеству купленного на складе товара (c_1 – цена единицы товара). Потери от функционирования склада более многообразны. Потери на хранение товара это, во-первых, затраты на содержание помещения склада, и они пропорциональны времени хранения товара. Во-вторых, есть потери, связанные с порчей товара и созданием условий его хранения, и они пропорциональны количеству товара на складе (c_2 – затраты на хранение единицы товара в единицу времени).

Потери на заказ товара связаны с оплатой заказанного товара и транспортными расходами, которые возрастают с увеличением степени срочности заказа (c_3, c_4 – затраты на доставку единицы товара в обычном и срочном заказах соответственно).

Наконец, если товара на складе нет, то покупатели уйдут ни с чем. Эта упущенная выгода от работы склада также входит в потери (c_5 – средняя стоимость некупленного товара в расчете на одного покупателя, не совершившего покупку).

В основе алгоритма моделирования работы склада лежит формирование последовательности $\{t_i, x_i\}, i = 1, 2, \dots$, где t_i – последовательные моменты наступления событий одного из пяти типов: приход нового покупателя, обычный заказ товара, срочный заказ товара, доставка обычного заказа, доставка срочного заказа; x_i – количество товара на складе после события, наступившего в момент t_i . В рамках этой модели склада можно провести оптимизацию уровня и величины заказа, максимизирующих прибыль

$$F = \frac{1}{T} \left\{ c_1 \sum_i z_i - c_2 \sum_i x_i (t_i - t_{i-1}) - c_3 r_1 N_1 - c_4 r_2 N_2 - c_5 m \right\}.$$

Принципиальная блок-схема алгоритма моделирования работы склада с заказами одного типа приведена на рис. 9.

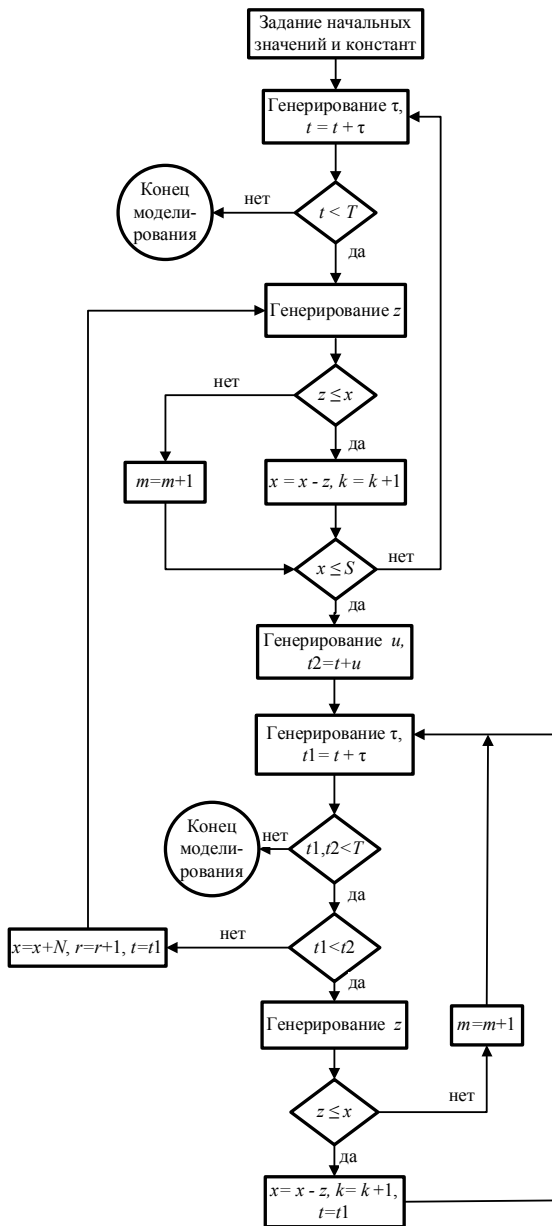


Рис. 9

Задание для самостоятельной работы

1. Задать x_0 – начальное количество товара на складе, значение параметра пуассоновского потока покупателей, непрерывное распределение времени доставки заказов (можно взять экспоненциальное или Γ – распределение), дискретное распределение величины покупок, предварительные значения уровней и объемов заказов, удельные прибыли и потери.

2. Задать время моделирования так, чтобы за один цикл моделирования на складе побывало в среднем 1000 покупателей.

3. Для уточнения выбора значений параметров модели выполнить отладочный прогон программы моделирования с вычислением значения функционала F .

После того, как «разумные» значения параметров будут определены, выполнить необходимое число прогонов программы для решения задачи оптимизации.

4.5. Моделирование деятельности страховой компании

Рассмотрим моделирование так называемого портфеля страховой компании – совокупности клиентов, застрахованных в компании к какому-то моменту времени, например, к началу года. При этом целью моделирования может быть расчет доходности портфеля компании, определение вероятности разорения компании, если сумма страховых выплат превысит имеющийся капитал компании в какой-то момент времени.

При моделировании судьбы каждого из клиентов, вошедших в портфель страховой компании, могут происходить следующие события:

1) страховые платежи, увеличивающие капитал компании и происходящие в заранее оговоренные моменты времени (потоки моментов и величин платежей можно считать детерминированными);

2) страховые случаи (пожар, авария, несчастный случай), уменьшающие капитал компании на величину страховых выплат (потоки страховых случаев с клиентами и размеры страховых выплат случайные);

3) клиент может уйти из портфеля, при этом капитал компании не меняется.

Потоки приходящих в страховую компанию клиентов и страховых случаев с одним клиентом при моделировании обычно считаются пуассоновскими потоками с известными интенсивностями λ и μ соответственно. Размер страхового возмещения – случайная величина с известным распределением, уход клиента из компании – случайное событие с известной вероятностью. Каждый новый клиент, заключивший договор страхования, платит первоначальный взнос, случайная величина которого имеет известную плотность вероятности.

стей. С клиентами, входящими в портфель страховой компании, происходят страховые случаи, образующие пуассоновский поток интенсивности $\mu \cdot k$, где k – число клиентов компании в данный момент времени. Для каждого страхового случая генерируется случайная величина страховой выплаты. Доход компании – кусочно-постоянная функция $x(t)$, меняет значение в моменты времени t_i , когда происходят события типов 1) и 2). В основе моделирования деятельности страховой компании генерирование последовательности $\{t_i, x(t_i)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которое выполняется в цикле пока $t_i < T$, T – время моделирования. На i -ом шаге цикла в момент времени t_i следующий клиент придет через время $\tau_1 = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha_1$, следующий страховой случай произойдет через время $\tau_2 = -\frac{1}{\mu k(t_i)} \ln \alpha_2$. Тогда $t_{i+1} = t_i + \tau$, $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$. Если $\tau_1 < \tau_2$, надо генерировать размер страхового взноса, увеличивать на него капитал компании, увеличивать число клиентов компании $k(t_{i+1}) = k(t_i) + 1$, если $\tau_1 > \tau_2$, то надо генерировать величину страхового возмещения и уменьшать на нее капитал компании. Кроме того надо моделировать уход кли-

ента из компании с вероятностью p . Эту принципиальную модель можно усложнять.

Задание для самостоятельной работы

Выполнить моделирование годовой работы сектора несчастных случаев страховой компании, если начальный капитал составляет 12 млн руб., интенсивность пуассоновского потока несчастных случаев с каждым клиентом равна 10^{-2} , интенсивность пуассоновского потока клиентов равна 3. Размеры выплат страховых возмещений имеют распределение

x_i	2000	10000	100000
$P\{x = x_i\}$	0,6	0,35	0,05

Страховой взнос уплачивается однократно и составляет 100 руб.

4.6. Моделирование процесса ценообразования

Пусть рынок находится в условиях локального равновесия и в основе модели ценообразования лежит принцип баланса спроса и предложения. Предположим, что ось времени разбита на отрезки и эти отрезки пронумерованы. Обозначим:

1) P_t – цена за единицу товара на временном отрезке с номером t ,

- 2) D_t – спрос на товар на временном отрезке с номером t ,
- 3) S_t – предложение товара на временном отрезке с номером t ,
- 4) U_t – случайная величина, отражающая колебания спроса,
 V_t – случайная величина, отражающая колебания объема выпуска товара (влияние моды, погоды, изменения технологий),
 W_t – случайная величина – дефект спроса в модели локального равновесия, – все на временном отрезке с номером t .

Первая модель формирования цены

Политика фирмы-продавца основывается на предположении, что на интервале времени с номером t цена на товар не изменится и будет такой же как и на интервале с номером $t-1$. Модель изменения цены определяется системой линейных уравнений

$$\begin{cases} D_t = A - BP_t + U_t, \\ S_t = C + EP_{t-1} + V_t, \\ S_t = D_t + W_t, \end{cases}$$

где константы A, B, C, E характеризуют товар.

Таким образом, цена товара на интервале времени с номером t моделируется по формуле

$$P_t = \frac{1}{B}(A - C - EP_{t-1} + U_t + W_t - V_t).$$

Так же, как в детерминированной модели баланса спроса-предложения, возможны следующие варианты поведения цены:

1) При $\frac{E}{B} > 1$ цена колеблется с нарастающей амплитудой;

2) При $\frac{E}{B} < 1$ цена колеблется около равновесной цены

$\bar{P} = \frac{A - C}{B + E}$, приближаясь к ней.

3) При $\frac{E}{B} = 1$ цена колеблется около равновесной цены

$\bar{P} = \frac{A - C}{B + E}$ с одинаковой амплитудой.

Вторая модель формирования цены

В этой модели политика фирмы-продавца основывается на том, что цена на товар на интервале с номером t зависит от цены на двух предыдущих интервалах. Таким образом, прогнозируемая цена товара определяется равенством

$\tilde{P}_t = P_{t-1} - \rho(P_{t-1} - P_{t-2})$, где ρ – некоторый параметр модели.

И текущая цена товара в модели баланса спроса и предложения определяется уравнением

$$P_t = \frac{1}{B} (A - C - E(P_{t-1} - \rho(P_{t-1} - P_{t-2}))) + U_t + W_t - V_t.$$

Равновесная цена товара $\bar{P} = \frac{A - C}{B + E}$.

Последнее уравнение является стохастическим разностным уравнением второго порядка и имитационное моделирование в данном случае предпочтительнее аналитического решения.

Третья модель формирования цены

В этой модели учитывается возможность создания запасов товара на оптовых складах. Пусть Q_t – количество товара на складах к концу временного интервала с номером t . Тогда $\Delta Q_t = Q_t - Q_{t-1} = S_t - D_t$.

Предполагается, что продавцы устанавливают цены на товар на интервале номер t в соответствии с тем, как меняется уровень запасов товара на складах $P_t = P_{t-1} - \lambda \Delta Q_{t-1}$. Тогда система уравнений, определяющих динамику цен на товар, имеет вид

$$\begin{cases} S_t = C + EP_{t-1} + V_t, \\ D_t = A - BP_t + U_t, \\ P_t = P_{t-1} - \lambda \Delta Q_{t-1} = P_{t-1} - \lambda(S_{t-1} - D_{t-1}) \end{cases}.$$

Решая эту систему относительно P_t , получим формулу моделирования цены

$$P_t = \lambda(A - C) + (1 - \lambda B)P_{t-1} - \lambda EP_{t-2} + \lambda(U_{t-1} - V_{t-1})$$

с равновесной ценой товара $\bar{P} = \frac{A - C}{B + E}$.

4.7. Моделирование дуополии

При изучении теории фирмы рассматриваются детерминированные модели дуополии – взаимодействия на рынке двух фирм при различных стратегиях поведения фирм: равновесие Курно, неравновесие Стекельберга, совместные действия. Рассмотрим случайную модель взаимодействия двух фирм по стратегии равновесия Курно с учетом локальных флуктуаций цены товара, связанных с общей ситуацией на рынке.

Пусть имеются две фирмы A и B . Разобьем временной отрезок $[0, T]$ на отрезки равной длины Δt и обозначим t номер отрезка, $t = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, обозначим: A_t – объем товара, произведенного фирмой A на временном отрезке с номером t ; B_t – объем товара, произведенного фирмой B на

временном отрезке с номером t ; Q_t – суммарный объем товара, произведенного фирмами A и B на временном отрезке с номером t ; P_t – рыночная цена единицы товара на временном отрезке с номером t ; $ПA_t$ – прибыль фирмы A на временном отрезке с номером t ; $ПB_t$ – прибыль фирмы B на временном отрезке с номером t ; C – затраты фирм на производство единицы товара, одинаковые у обеих фирм.

Введенные величины связаны следующими равенствами:

$$\begin{aligned} Q_t &= A_t + B_t, \\ ПA_t &= P_t \cdot A_t - C \cdot A_t, \\ ПB_t &= P_t \cdot B_t - C \cdot B_t. \end{aligned}$$

Будем считать, что в нашей модели цена товара P_t линейно зависит от предложения товара Q_t

$$P_t = D - EQ_t + U_t,$$

где D – уровень спроса, U_t – локальная флуктуация цены, E – параметр, определяющий скорость изменения цены.

Согласно стратегии Курно, планируя выпуск товара на временном отрезке номер t , фирма A считает, что фирма B сохранит выпуск товара на уровне предыдущего временного отрезка, и объем выпуска составит B_{t-1} . Тогда по прогнозу

фирмы A общий выпуск Q_t составит $Q_t = A_t + B_{t-1}$, цена товара на временном отрезке t будет

$$P_t = D - E(A_t + B_{t-1}) + U_t,$$

и прибыль фирмы A на временном отрезке t составит величину

$$\Pi A_t = (D - C) \cdot A_t - E \cdot A_t(A_t + B_{t-1}) + A_t \cdot U_t.$$

Стремление фирмы A произвести оптимальное количество товара и максимизировать свою прибыль приведет к условию

$$D - C - 2E \cdot A_t - E \cdot B_{t-1} + U_t = 0.$$

Таким образом стратегия Курно предписывает фирме A планировать выпуск товара в объеме

$$A_t = \frac{1}{2E}(D - C - E \cdot B_{t-1} + U_t).$$

Согласно стратегии Курно фирма B думает точно так же, и ее план выпуска товара составит

$$B_t = \frac{1}{2E}(D - C - E \cdot A_{t-1} + U_t).$$

Система уравнений функционирования фирм A и B имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} A_t = \frac{1}{2E}(D - C - E \cdot B_{t-1} + U_t), \\ B_t = \frac{1}{2E}(D - C - E \cdot A_{t-1} + U_t), \\ Q_t = A_t + B_t, \\ P_t = D - EQ_t + U_t, \\ \text{ПА}_t = P_t \cdot A_t - C \cdot A_t, \\ \text{ПВ}_t = P_t \cdot B_t - C \cdot B_t. \end{array} \right.$$

Задавая исходные данные и параметры этой модели можно моделировать работу двух фирм по стратегии Курно, генерируя на каждом шаге цикла по t реализацию случайной флуктуации цены товара с выбранным законом распределения. После работы программы, моделирующей работу двух фирм можно выполнить статистическую обработку результатов и определить необходимые закономерности взаимодействия фирм по стратегии Курно. Подобным же образом можно моделировать и другие стратегии взаимодействия фирм.

4.8. Моделирование конкурентной отрасли (деловая игра)

Еще одним из приложений имитационного моделирования являются деловые игры, широко используемые в образова-

нии. По разнообразию деловые игры мало уступают компьютерным играм. Приведем пример простейшей деловой игры, в которой каждый из n участников должен планировать выпуск некоторой продукции своей фирмой с учетом того, что на рынке действуют другие фирмы, которые представлены другими участниками игры.

Пусть период игры $[0, T]$ разбит на равные отрезки времени, $t = \overline{1, N}$ – номер временного отрезка, i – номер участника игры (фирмы), $i = \overline{1, n}$. Обозначим $X_{i,t}$ – объем продукции, произведенной i -ой фирмой на временном отрезке номер t , $C_{i,t}$ – производственные затраты i -ой фирмы на временном отрезке номер t , $\Pi_{i,t}$ – полная прибыль i -ой фирмы на временном отрезке номер t , $U_{i,t}, V_t$ – случайные величины с известными законами распределения, отражающие случайные колебания производственных затрат и цены товара соответственно, A_i – номинальная мощность i -й фирмы (максимальный объем выпускаемой продукции, одинаковый для всех временных отрезков), S_t – полный объем выпуска товара в отрасли на временном отрезке номер t , D_t – полное потребление продукции отрасли на временном отрезке номер t ,

P_t – цена единицы продукции отрасли на временном отрезке номер t , B, BI, C, E, F, G, H – константы, значения которых выбираются перед началом деловой игры.

Алгоритм моделирования задается уравнениями, описывающими производственные затраты,

$$C_{i,t} = BI(X_{i,t} - A_i)^2 + B \cdot A_i^2 + C + U_{i,t},$$

зависимость цены продукта от спроса на него

$$P_t = H - E \cdot D_t - F \cdot D_{t-1} - G \cdot D_{t-2} + V_t,$$

и тождествами, задающими суммарный объем выпуска продукции в отрасли: $S_t = \sum_{i=1}^n X_{i,t}$, баланс спроса и предложения:

$D_t = S_t$, прибыль i -й фирмы на временном отрезке номер t :

$$\Pi_{i,t} = P_t \cdot X_{i,t} - C_{i,t}.$$

В компьютерах участников деловой игры организуется интерфейс с окнами запросов и вывода информации на экран. Каждый i -ый участник игры имеет информацию об объемах выпуска продукции других фирм и на каждом временном отрезке номер t планирует объем выпуска товара $X_{i,t}$, получая результаты принятого им решения: текущие значения цены товара, издержек и прибыли фирмы. В зависимости от этих результатов планируется выпуск продукции

на $(t + 1)$ -ый отрезок времени и т.д. В процессе деловой игры участники учатся работать в конкурентной среде. Целью деловой игры может быть выбор оптимальной стратегии поведения руководителя фирмы на рынке.

4.9. Макроэкономические модели

4.9.1. Модель Самуэльсона-Хикса

Эта простая макроэкономическая модель государственного управления появилась одной из первых в начале XX века для изучения влияния на экономику государства его денежной и налоговой политики.

Пусть снова ось времени разбита на равные промежутки и t – номер временного промежутка, $t = 1, 2, \dots$. Для переменных в модели используются следующие обозначения: C_t – потребление на временном отрезке номер t , I_t – инвестиции на временном отрезке номер t , G_t – правительственные затраты на временном отрезке номер t , Y_t – национальный доход на временном отрезке номер t . Для учета случайности в моделях потребления и инвестиций берутся случайные вели-

чины u_t, v_t . Параметры модели: b – коэффициент акселерации (определяет денежную политику), c_1 – предельная склонность к потреблению на временном отрезке номер $t-1$, c_2 – предельная склонность к потреблению на временном отрезке номер $t-2$, $0 < c_1, c_2 < 1$, g – коэффициент правительственных затрат.

В основе уравнений модели лежат следующие предположения:

1. Потребление на временном отрезке номер t определяется величиной национального дохода на двух предыдущих временных отрезках, и величина потребления задается уравнением

$$C_t = c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + u_t.$$

2. На инвестиции идет доля прироста национального дохода за предыдущий временной отрезок

$$I_t = b(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + v_t.$$

3. Правительственные расходы составляют долю национального дохода за предыдущий временной отрезок

$$G_t = g \cdot Y_{t-1}.$$

Единственное тождество модели задается балансом доходов и расходов бюджета без дефицита и профицита

$$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

Эта модель использовалась для изучения влияния на потребление:

а) денежной политики (варьировалось значение коэффициента акселерации b);

б) налоговой политики (варьировалось значение коэффициента правительственных затрат g).

4.9.2. Модель Клейна экономики США (1921–1941 гг.)

Модель Клейна была первой по-настоящему значимой макроэкономической моделью. На временной оси, разбитой на равные отрезки с номером t , $t = 1, 2, \dots$, были выбраны **6 эндогенных** (неуправляемых) переменных: 1) C_t – уровень личного потребления на временном отрезке номер t , 2) I_t – суммарные инвестиции на временном отрезке номер t , 3) P_t – суммарные прибыли на временном отрезке номер t , 4) Y_t – национальный доход на временном отрезке номер t , 5) K_t – суммарный основной капитал на временном отрезке номер t , 6) $W_{1,t}$ – фонд заработной платы в частном секторе на временном отрезке номер t .

В качестве *экзогенных* (управляемых) переменных в модели взяты следующие три переменные:

1) G_t – правительственные затраты на временном отрезке номер t ,

2) X_t – налог на деловую активность на временном отрезке номер t ,

3) $W_{2,t}$ – фонд заработной платы в правительственном секторе на временном отрезке номер t .

Модель содержит три тождества:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t - X_t \text{ (баланс доходов и расходов),}$$

$$P_t = Y_t - (W_{1,t} + W_{2,t}) \text{ (прибыль),}$$

$$K_t = K_{t-1} + I_t \text{ (изменение капитала)}$$

и три уравнения функционирования:

функция потребления

$$C_t = a_1 + a_2(W_{1,t} + W_{2,t}) + a_3P_t + a_4P_{t-1} + \xi_{1,t},$$

функция инвестиций

$$I_t = b_1 + b_2P_t + b_3P_{t-1} + b_4K_{t-1} + \xi_{2,t},$$

спрос на рабочую силу в частном секторе

$$W_{1,t} = c_1 + c_2(Y_t + X_t - W_{2,t}) + c_3(Y_{t-1} + X_{t-1} - W_{2,t-1}) + c_4t + \xi_{3,t}.$$

Случайные величины $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$, $\xi_{3,t}$ были введены в модель после того, как выяснилось, что результаты моделирования в детерминированной модели с рассчитанными оценками параметров $a_i, b_i, c_i, i = \overline{1,4}$, не согласуются с реальными данными. Учет случайности сделал модель адекватной.

Целью моделирования была максимизация выборочного среднего национального дохода на последующие 20 лет при следующих вариантах экономической политики:

- 1) сохранение уровней правительственных заказов, налогов и фонда правительственной заработной платы;
- 2) ежегодное снижение налогов на 5%;
- 3) ежегодное увеличение правительственных заказов на 5%;
- 4) ежегодное увеличение фонда заработной платы бюджетников на 5%.

Сегодня имитационные модели широко используются в промышленности и банковской сфере стран с развитой экономикой. Так Брукингская модель экономики США содержит 112 тождеств, 118 уравнений функционирования и оперирует 104 экзогенными и управляющими переменными. С помощью Уортонской модели, содержащей 47 уравнений функционирования и 29 тождеств, делается ежеквартальный микроэкономический прогноз деловой активности, публикуемый в «Business Week».

Литература

1. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
2. Нейлор Т. и др. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. М.: Мир, 1975.
3. Форсайт Дж., Малькольм М. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
4. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
I. Имитация скалярных воздействий на реальные объекты	11
1.1. Базовый датчик	11
1.1.1. Базовые датчики на последовательностях максимальной длины	11
1.1.2. Детерминированный хаос	13
1.1.3. Аперриодичность	17
1.1.4. Проверка равномерности плотности вероятностей	19
1.1.5. Проверка корреляционной связи	21
1.2. Моделирование случайных событий	22
1.3. Общие методы генерирования значений дискретных случайных величин	23
1.4. Специальные методы генерирования дискретных случайных величин	28
1.5. Общие методы генерирования непрерывных случайных величин	32
1.6. Генерирование значений нормальных случайных величин	42
1.7. Генерирование значений случайных величин с бета- и гамма- распределениями	47
1.8. Генерирование значений случайных величин других типов	54
II. Моделирование векторных случайных возмущений	57
2.1. Общие методы генерирования	57
2.2. Генерирование нормальных случайных векторов	59
2.3. Генерирование случайных векторов с заданными одномерными распределениями и матрицей корреляции компонент	62

2.4. Генерирование случайных векторов, равномерно распределенных в заданной n -мерной области и на сфере	66
2.5. Генерирование случайных векторов других типов	70
2.5.1. Полиномиальное распределение	70
2.5.2. Многомерное распределение Стьюдента	71
2.5.3. Многомерное В-распределение	72
III. Моделирование случайных процессов	73
3.1. Дискретные марковские процессы	73
3.1.1. Дискретные марковские процессы с дискретным временем	74
3.1.2. Дискретные марковские процессы с непрерывным временем	77
3.2. Другие случайные процессы	77
3.2.1. Стандартный винеровский процесс	77
3.2.2. Арифметическое броуновское движение	78
3.2.3. Одномерный гауссовский случайный процесс с экспоненциальной функцией корреляции	78
3.2.4. Многомерный гауссовский случайный процесс с экспоненциальной функцией корреляции	80
3.2.5. Гауссовский случайный процесс с дробно-рациональным спектром	81
3.2.6. Модель ARMA (авторегрессии – скользящего среднего) случайного процесса с дробно-рациональным спектром	84
3.2.7. Случайный процесс с экспоненциальным одномерным распределением сечений	86
3.3. Моделирование потоков событий	88
3.3.1. Пуассоновский поток событий	88
3.3.2. Рекуррентный поток событий	89
3.3.3. Дважды стохастический поток событий	90
IV. Моделирование систем массового обслуживания	93
4.1. Моделирование СМО $GI G k \infty$	94
4.2. Моделирование систем телетрафика	97

4.3. Моделирование работы автотранспортного предприятия	99
4.4. Моделирование работы склада	102
4.5. Моделирование деятельности страховой компании	107
4.6. Моделирование процесса ценообразования	110
4.7. Моделирование дуополии	114
4.8. Моделирование конкурентной отрасли (деловая игра)	117
4.9. Макроэкономические модели	120
4.9.1. Модель Самуэльсона-Хикса	120
4.9.2. Модель Клейна экономики США (1921–1941 гг.)	122
Литература	125

Учебное издание

Наталья Юрьевна Марголис

Имитационное моделирование

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции

Компьютерная верстка А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 9.09.2015 г. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 7,5.
Тираж 100 экз. Заказ № 1240.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–53-15-28
Сайт: <http://publish.tsu.ru>
E-mail: rio.tsu@mail.ru